This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

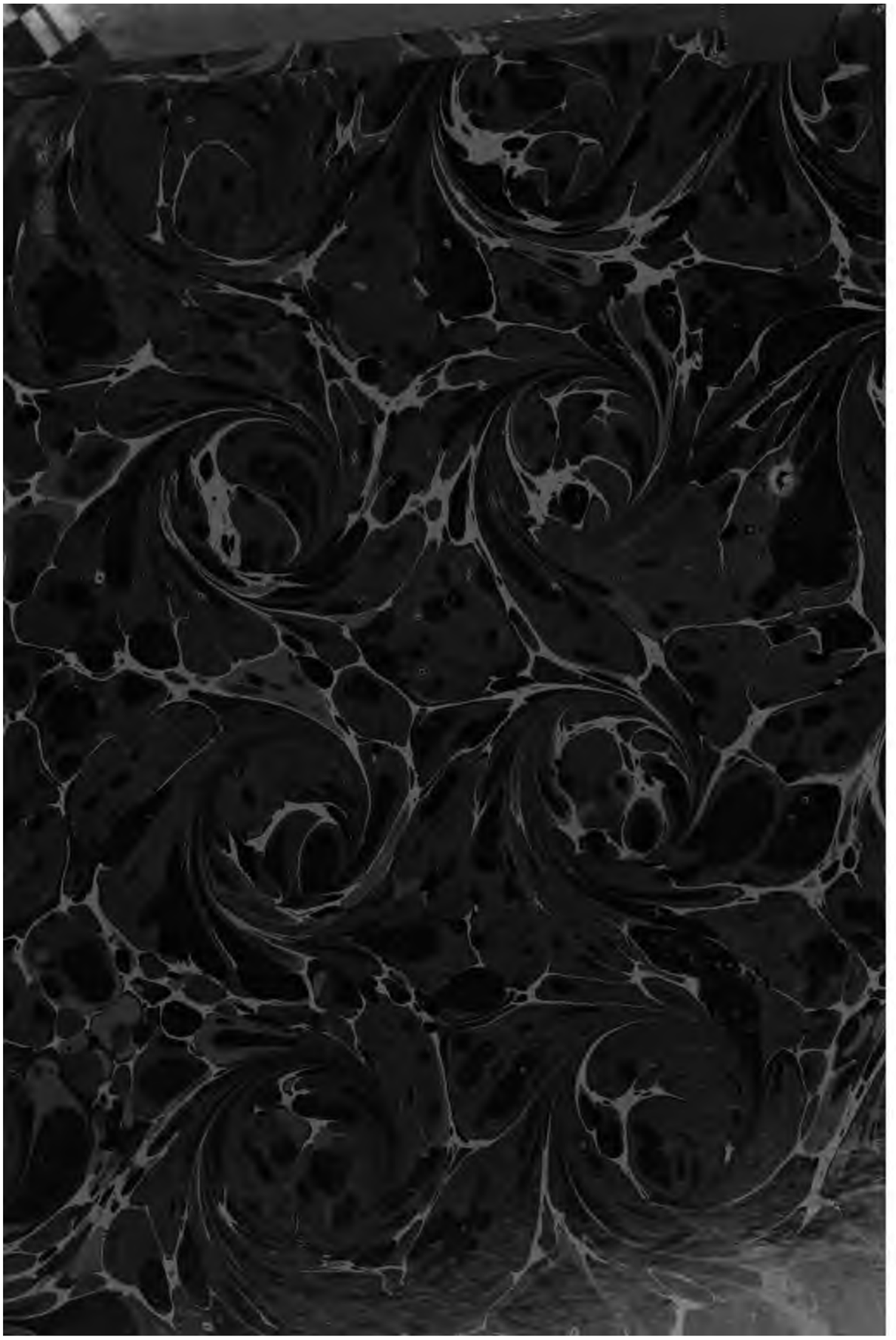
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

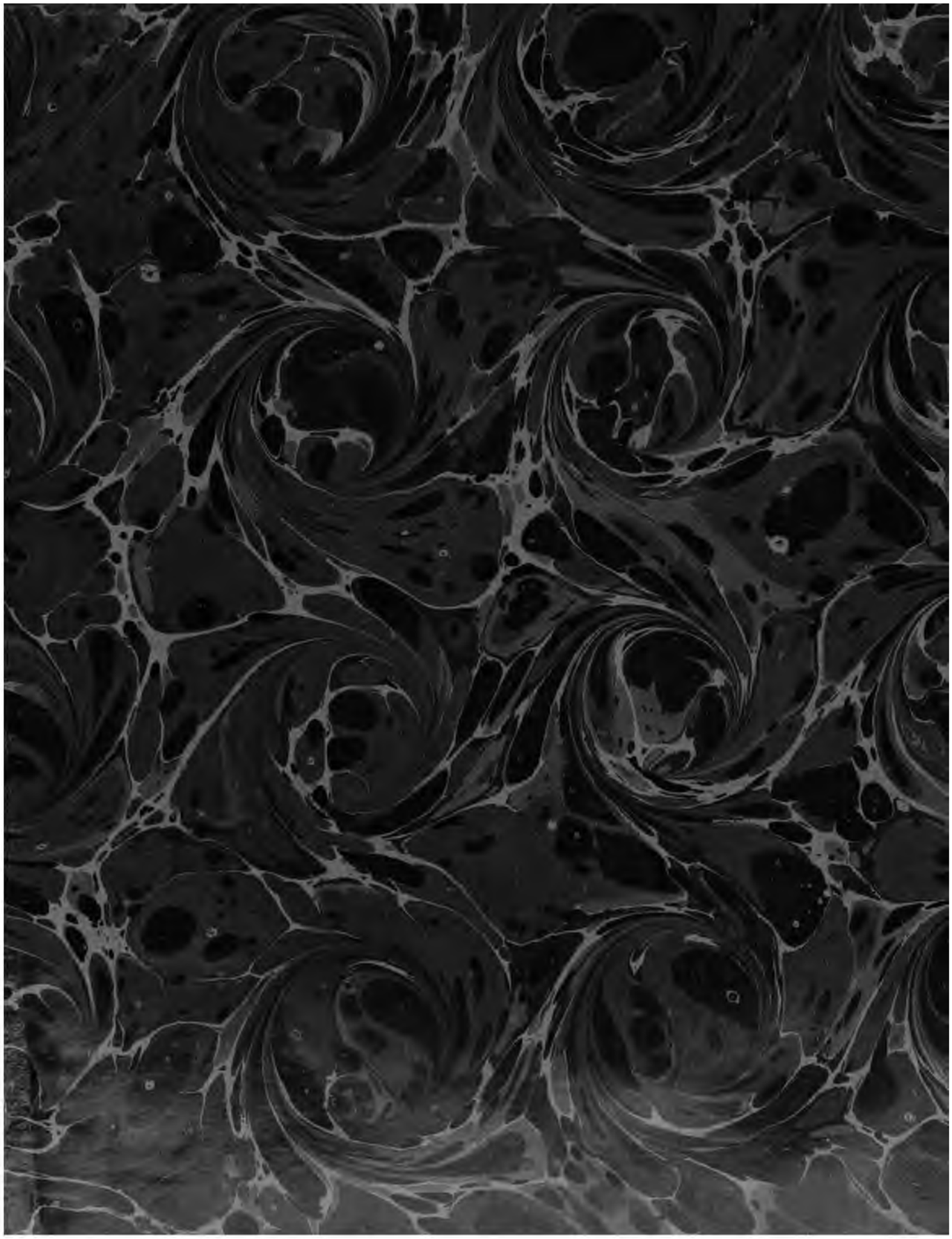
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.





F951

GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

HERAUSGEGEBEN

VON

RICHARD FUCHS IN BERLIN. UND LUDWIG SCHLESINGER IN KLAUSENBURG.

ZWEITER BAND:

ABHANDLUNGEN (1875—1887)

REDIGIRT

VON

L. SCHLESINGER.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1906.

Alle Rechte vorbehalten, einschliesslich des Übersetzungsrechtes.

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

VORWORT.

Der vorliegende zweite Band der mathematischen Werke von L. Fuchs enthält die fünfunddreissig in der Zeit von Ostern 1875 bis Ende des Jahres 1887 veröffentlichten Abhandlungen. Die redactionelle Arbeit wurde in derselben Weise wie beim ersten Bande ausgeführt.

Bei der sachlichen Revision der einzelnen Abhandlungen sowie bei der Correctur des ganzen Bandes hat mich mein Freund L. Heffter in gleich wirkungsvoller Weise wie beim ersten Bande unterstützt. Ferner hat Herr M. Krause die grosse Güte gehabt, eine Correctur der Abhandlungen XXVI, XXVII, XXVIII zu lesen und meine diesen Abhandlungen hinzugefügten Anmerkungen einer Prüfung zu unterziehen. Die in diesem Bande besonders zahlreichen in französischer Sprache geschriebenen Arbeiten (XXI, XXII, XXIV, XXVI, XXVIII, XXXII, XXXIVa, XXXVI, XXXVII, XLII) hat mein Freund H. Vogt hauptsächlich in sprachlicher Hinsicht revidirt. Der andere Herausgeber Herr Richard Fuchs und Herr H. Lemke haben je eine Correctur der Druckbogen gelesen. Allen genannten Herren sei auch an dieser Stelle für ihre werthvolle Mitarbeit der herzlichste Dank der Herausgeber ausgesprochen.

Ein Wiederabdruck der im Bulletin des Sciences mathématiques erschienenen von Herrn C. Stéphanos herrührenden französischen Übersetzungen der Abhandlungen XXXI und XXXV wurde unterlassen, dagegen schien es geboten, die von Fuchs selbst verfasste französische Redaction der beiden Ab-

handlungen XXXIII und XXXIV unverkürzt wiederzugeben (Abh. XXXIVa). Aus den mir von Frau Geheimräthin Fuchs anvertrauten, an Fuchs gerichteten Briefen von Ch. Hermite konnte ich in den Anmerkungen zu den Abhandlungen XXIV und XXVI einige für die Entstehungsgeschichte dieser Arbeiten wichtige Auszüge mittheilen.

Klausenburg, 5. Mai 1906.

L. Schlesinger.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Seite

Vorwort v

XIX. Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie 1

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1875, S. 568–581 und S. 612–613.

Anmerkungen 10

XX. Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie 11

Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 81, 1876, S. 97–142.

Anmerkungen 62

XXI. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite 63

Journal de Mathématiques p. et a., 3e série, t. II, 1876, p. 158–160.

Anmerkung 66

XXII. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre 67

Comptes rendus de l'Académie des Sciences; a. t. 82, 1876, p. 1494–1497, b. t. 83, 1876, p. 46–47.

Anmerkung 72

XXIII. Selbstanzeige der Abhandlung: »Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie«. Borchardts Journal, Bd. 81, S. 97 sqq. 73

Repertorium f. r. u. a. Mathematik, Bd. 1, 1877, S. 1–9.

Anmerkung 83

XXIV. Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite . . 87

Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 83, 1877, S. 13–37.

Anmerkungen 112

Seite

XXV. Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen. Zweite Abhandlung 115
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 85, 1878, S. 1–25.
Anmerkung 143

XXVI. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite 145
Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 85, 1877, p. 947–950.
Anmerkungen 149

XXVII. Über eine Klasse von Differentialgleichungen, welche durch Abelsche oder elliptische Functionen integrirbar sind 151
Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1878, S. 19–32; Annali di matematica p. ed. a., Ser. II, Bd. 9, 1878, S. 25–35.
Anmerkung 160

XXVIII. Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. Extrait d'une lettre à M. Hermite 161
Journal de Mathématiques p. et a., 3e série, t. 4, 1878, p. 125–140.
Anmerkung 175

XXIX. Selbstanzeige der Abhandlung: ›Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite‹. Borchardts Journal, Bd. 83, S. 13 . . 177
Repertorium f. r. u. a. Mathematik, Bd. 2, 1879, S. 235–240.
Anmerkung 184

XXX. Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen 185
Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1880, S. 170–176.
Anmerkung 190

XXXI. Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen 191
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 89, 1880, S. 151–169.
Anmerkungen 212

XXXII. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite 213
Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 90, 1880; a. p. 678–680, b. p. 735–736.

Seite

XXXIII. Über die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen 219
Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1880, S. 445–453.

XXXIV. Auszug aus einem Schreiben des Herrn L. Fuchs an C. W. Borchardt 225
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 90, 1881, S. 71–73.
Anmerkungen 228

XXXIVa. Sur les fonctions provenant de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires 229
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2e série, t. 4, 1880, p. 328–336.

XXXV. Über Functionen zweier Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gegebener Functionen entstehen 239
Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 27, Mathematische Klasse, 2, S. 1–39.
Anmerkungen 274

XXXVI. Sur les fonctions de deux variables qui naissent de l'inversion des intégrales de deux fonctions données. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite 275
Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, 1881. a. p. 1330–1331, b. p. 1401–1403.
Anmerkung 281

XXXVII. Sur une équation différentielle de la forme $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite 283
Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, 1881, p. 1063–1065.

XXXVIII. Über Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben 285
Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1882, S. 81–84.

XXXIX. Über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen . . 289
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, S. 703–710.
Anmerkungen 298

XL. Über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen . . 299
Acta Mathematica, Bd. 1, 1882, S. 321–362.
Anmerkungen 339

XLI. Über Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale einer gleich grossen Anzahl gegebener Functionen entstehen 341
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883, S. 507–516.
Anmerkung 350

Seite

XLII. Sur un développement en fraction continue. Par Ch. Hermite et L. Fuchs 351
Acta Mathematica, t. 4, 1884, p. 89–92.

XLIII. Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen 355
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, S. 699–710.
Anmerkungen 368

XLIV. Antrittsrede gehalten am 3. Juli 1884 in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibniztages der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 369
Sitzungsberichte, 1884, S. 744–747.

XLV. Über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist . 373
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, S. 1171–1177.

XLVI. Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln 381
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, S. 5–12.
Anmerkungen 390

XLVII. Über die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können 391
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1886, S. 279–300.
Anmerkungen 415

XLVIII. Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eine Involution zulassen 417
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1886, S. 797–804.
Anmerkungen 426

XLIX. Über eine Klasse linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . 427
Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 100, S. 189–200.
Anmerkungen 440

L. Über die Umkehrung von Functionen zweier Veränderlichen 441
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, S. 99–108.
Anmerkung 452

LI. Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen und über eine Anwendung desselben auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung 453
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, S. 159–166.
Anmerkung 462

LII. Bemerkungen zu einer Note des Herrn Hurwitz, enthalten in No. 6 Jahrg. 1887, S. 104 sqq. der Nachrichten 463
Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1887, S. 345–347.

LIII. Über Relationen zwischen den Integralen von Differentialgleichungen . 467
Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, S. 1077–1094.
Anmerkungen 486

Berichtigungen 487

XIX.

ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN, UND EINE NEUE ANWENDUNG DER INVARIANTENTHEORIE.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1875, No. 21, 1. September 1875, Sitzung am 7. August, S. 568—581 und No. 23, 17. November 1875, Sitzung am 6. November, S. 612—613.)

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften beehre ich mich im [568 Folgenden von den Resultaten einer Arbeit Mittheilung zu machen, welche nächstens in BORCHARDTS Journal für reine und angewandte Mathematik erscheinen wird.

1.

Besitzt eine irreductible Gleichung

$$A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0, \tag{1.}$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_m$ rationale Functionen von z sind, zwei Wurzeln, deren Quotient j eine rationale Function von z ist, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Ist j eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist λ ein Divisor von m, und es ist

$$A_{m-i} = 0$$

wenn nicht $i \equiv 0$, mod. λ.

Es werde vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0, \tag{A.}$$

[569

wo p_1, p_0 rationale Functionen von z sind, ein algebraisches Integral u besitzt, und es sei (1.) die irreductible Gleichung, welcher u genügt, alsdann sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.) Integrale der Differentialgleichung (A.).

Wenn unter der Voraussetzung des vorigen Satzes die Gleichung (1.) zwei Wurzeln besitzt, deren Quotient nicht für jeden Werth von z constant ist, so hat die Differentialgleichung (A.) nur algebraische Integrale.

Ist aber der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1.) constant, so ist ein Integral der Differentialgleichung (A.) eine Wurzel einer rationalen Function.

Die Beurtheilung, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden kann, wird in jedem Falle auf die Frage zurückgeführt, unter welchen Umständen ein gegebenes System linearer Gleichungen endliche Lösungen besitzt.

Die weitere Untersuchung beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Umständen die lineare Differentialgleichung (A.) algebraische Integrale besitzt, welche nicht Wurzeln einer rationalen Function sind.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner Arbeit in BORCHARDT's Journal Band 66 [1]), und es ist

570] (2.) $$p_1 = \sum_1^\varrho{}_\alpha \frac{\alpha_\alpha}{z - a_\alpha}, \qquad p_0 = \sum_1^\varrho{}_\alpha \left\{ \frac{\beta_\alpha}{(z-a_\alpha)^2} + \frac{\gamma_\alpha}{z-a_\alpha} \right\},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die singulären Punkte bedeuten, und

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\varrho = 0.$$

Wir substituiren:

(3.) $$u = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}\alpha_1}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}\alpha_2}\ldots(z-a_\varrho)^{-\frac{1}{2}\alpha_\varrho} y,$$

und erhalten für y die Differentialgleichung:

(B.) $$\frac{d^2y}{dz^2} = Py,$$

wo

$$P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_0.$$

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Die beiden Wurzeln der zu irgend einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) ergänzen sich zur positiven Einheit, während die beiden Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung zusammen die negative Einheit ergeben.

Sind die Wurzeln der zu irgend einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A.) ratio- [571
nale Zahlen, so sind α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so sind auch die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch.

Sind umgekehrt die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (A.) algebraisch.

2.

Durch einen beliebigen Umlauf von z gehen die Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2 der Differentialgleichung (B.) resp. über in:

$$(1.) \qquad \begin{cases} y_1' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y_2' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2. \end{cases}$$

Die Determinante Δ der Substitution

$$(2.) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

ist gleich der positiven Einheit.

Bildet man eine Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ d. h. eine ganze homogene Function der beiden Grössen y_1, y_2 mit den constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots$, und ist $\varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine Covariante dieser Form, so folgt, dass [572
dieselbe durch die Substitution (2.), durch welche die Form

$$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$$

in

$$f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$$

übergehe, sich genau in $\varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$ verwandelt.

Wenn $f(y_1, y_2)$ durch irgend einen Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergeht, so wird sich nach demselben Umlauf

jede Covariante dieser Form ebenfalls in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten verwandeln.

Ist $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z, so ist jede Covariante derselben ebenfalls Wurzel einer rationalen Function von z.

Wenn die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch sind, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale derselben Differentialgleichung.

Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches nach einem gewissen Umlaufe von z in yj übergeht, wo j eine primitive l^{te} Wurzel der Einheit sei, und setzt man

$$\psi(y^l) = c_0 + c_l y^l + c_{2l} y^{2l} + \cdots + c_{\left(\frac{m}{l}-1\right)l} y^{\left(\frac{m}{l}-1\right)l},$$

wo $c_0, c_l, c_{2l}, \ldots$ rationale Functionen von z sind, so hat jedes Integral die Form

$$(\alpha + \beta c_1) y + \beta y^{l-1} \psi(y^l), \tag{3.}$$

573] wo α, β Constanten und c_1 ebenfalls constant, wenn $l > 2$.

Ist $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.) von der Beschaffenheit

$$F(yj^k) = \varepsilon F(y), \tag{4.}$$

wo ε eine Constante ist, so ist

$$\varepsilon = j^{-k},$$

und wenn k nicht $\equiv 0$, mod. l sein soll, entweder

$$F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l)$$

oder l gerade und $k \equiv \frac{l}{2}$, mod. l.

Ist

$$F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l), \tag{5.}$$

so sind die Glieder der Reihe

$$F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F(yj^{l-1}) \tag{6.}$$

nur um constante Factoren von einander verschieden.

Ist $F(y)$ ein beliebiges Integral, welches nicht die Form (5.) hat, l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (6.) gleich einem anderen mit einem constanten Factor multiplicirt.

Ist aber l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe [574

$$F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right) \tag{7.}$$

gleich einem anderen mit einem constanten Factor multiplicirt. Dagegen ist:

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i). \tag{8.}$$

Der Grad der irreductiblen Gleichung, welcher ein Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Dieser Grad kann also als der zur Differentialgleichung (B.) gehörige bezeichnet werden.

Den Complex der Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades, welcher y_1 genügt, die so beschaffen sind, dass nicht der Quotient zweier derselben gleich einer Einheitswurzel ist, nennen wir das reducirte Wurzelsystem der Gleichung.

Ist $n < m$, so sind die übrigen Wurzeln gleich einer des reducirten Wurzelsystems mit einer Einheitswurzel multiplicirt. Sind diese Factoren

$$j, j_1, j_2, \ldots \text{ resp. } l^{te}, l_1^{te}, l_2^{te}, \ldots$$

primitive Wurzeln der Einheit und l die grösste unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots$, so liefert das System:

$$y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \ldots,\ y_i j^{l-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.}$$

die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen Gleichung.

Diese Zahl l nennen wir den Index des reducirten Wurzelsystems [575 oder der irreductiblen Gleichung, und man hat

$$m = nl. \tag{10.}$$

Wenn durch irgend einen Umlauf von z zwei Glieder y_i, y_k desselben reducirten Wurzelsystems resp. in $y_{i'} j^{\alpha}, y_{k'} j^{\beta}$ übergehen, wo $y_{i'}, y_{k'}$ Glieder desselben reducirten Wurzelsystems sind, und sind i und k verschieden, so sind auch i' und k' verschieden.

3.

Es sei η ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades, welcher

η genügt, und es sei

$$\eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.}$$

wo y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) darstellt, und bildet man die Form:

$$f(y_1, y_2) = \prod_0^{n-1} (A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2), \tag{2.}$$

so ist diese Form Wurzel einer rationalen Function von z, deren Exponent höchstens gleich l, dem Index des reducirten Wurzelsystems $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$. 576] Ist umgekehrt eine Form $F(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z, und η ein Linearfactor derselben, so enthält dieselbe Form auch die übrigen Glieder des reducirten Wurzelsystems, zu welchem η gehört, als Linearfactoren.

Eine Form, welche nur solche Linearfactoren enthält, die zusammen die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung bilden, welcher ein bestimmtes Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, und jeden nur in der ersten Potenz, nennen wir Primform.

Jede Primform ist Wurzel einer rationalen Function.

Haben zwei Primformen einen gemeinschaftlichen Linearfactor, so sind sie bis auf einen constanten Factor gleich.

Jede Form, welche gleich ist der Wurzel einer rationalen Function, lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen.

Ist eine Form Wurzel einer rationalen Function, so enthält sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem der Gleichung bilden, welcher sie genügen, und zwar jeden gleich oft.

4.

Ist N der geringste Werth, welchen die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher irgend ein Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, annehmen kann, so ist auch N der niedrigste Grad einer Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist. 577] Wir bezeichnen den Index einer irreductiblen Gleichung, deren reducirtes Wurzelsystem aus N Gliedern besteht, mit L, so dass $m = NL$.

Eine Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist und den niedrigsten Grad N hat, ist eine Primform.

Die Hessesche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform.

Der Index der irreductiblen Gleichung, deren reducirtes Wurzelsystem aus den Factoren der Hesseschen Covariante besteht, sei L', so ist

$$(2N-4)L' = NL.$$

Die Hessesche Covariante einer Form $f(y_1, y_2)$ kann nicht verschwinden, wenn $N > 1$.

Ist $N = 2$, so wird die Hessesche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ihre Invariante. Das Quadrat einer Primform zweiten Grades ist eine rationale Function von z.

Ist η ein Integral, welches zu einem reducirten Wurzelsysteme gehört, dessen Gliederzahl N, L der Index dieses Systems, und ist ein Factor ζ der Hesseschen Covariante der Primform, welche η als Factor enthält, der Form

$$\beta' \eta^{L-1} \psi(\eta_1^L), \tag{1.}$$

so ergiebt sich $N = 4$.

Ist $N > 2$ und hat die Hessesche Covariante $\psi(y_1, y_2)$ kein Integral der Form (1.) als Factor, und ist $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade, so zerfällt die Hessesche Covariante in ein Product von Factoren der Gestalt:

$$P_i = F_i(\eta) F_i(\eta J) \dots F_i(\eta J^{\lambda-1}), \tag{578}$$

wo J eine primitive L^{te} Wurzel der Einheit bedeutet.

Es ist

$$2N - 4 \equiv 0, \mod \lambda.$$

Setzt man

$$\frac{2N-4}{\lambda} = \lambda'$$

so ist

$$\psi(y_1, y_2) = P_1 P_2 \dots P_{\lambda'}. \tag{2.}$$

Ist $L = 2$, so ist $L' = 2$, $N = 4$ oder $L' = 3$, $N = 3$.

Ist $L > 2$ und

$$\eta = y_1, \quad \eta^{L-1} \psi(\eta^L) = y_2,$$

so enthält $\psi(y_1, y_2)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2, deren Exponenten durch λ theilbar sind.

Die HESSEsche Covariante $\psi_1(y_1, y_2)$ der HESSEschen Covariante $\psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2} \psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda).$$

Es ist $\lambda < 6$.

Hieraus ergiebt sich eine Tabelle der möglichen Combinationen von L, N für $N > 2$.

Der niedrigste Grad N einer Form $f(y_1, y_2)$, welche gleich einer Wurzel 579] einer rationalen Function ist, kann die Zahl zwölf nicht übersteigen.

Mit Hülfe der Invariantentheorie wird eine Tabelle der möglichen Gestalten für die Formen niedrigsten Grades N und der zugehörigen Werthe L aufgestellt.

Aus dieser Tabelle folgt, dass N eine der Zahlen 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 ist.

Für $N > 2$ ist L eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

Ist umgekehrt eine aus einem beliebigen Fundamentalsystem y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral.

Ist dabei $N > 2$, so hat sie nur algebraische Integrale.

Eine Form μ^{ten} Grades $f(y_1, y_2)$ genügt einer linearen Differentialgleichung $\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung (C.) mit rationalen Coefficienten. Diese Differentialgleichung ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung $\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher y^μ genügt.

Die Differentialgleichung (C.) ist ein für allemal für die Zahlen

$$\mu = 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

zu bilden, sie hat die Form

$$\text{(C.)} \qquad \frac{d^{\mu+1}v}{dz^{\mu+1}} + P_{\mu-1}\frac{d^{\mu-1}v}{dz^{\mu-1}} + \cdots + P_0 v = 0$$

und ist für $\mu = 1$ mit der Differentialgleichung (B.) identisch.

613] Die nothwendige Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt, ist, dass die Differentialgleichung (C.) für eine der Zahlen

$$\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werde. Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder erst für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ, der grösser ist als 2, so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung (B.) algebraische

Integrale. Erfolgt dieses aber zuerst für $\mu = 2$, und ist $\varphi(z)$ ein Integral der Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$, welches gleich der Wurzel einer rationalen Function, so ist $\varphi(z)^2$ eine rationale Function, und

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Grösse λ. Ist nun $\lambda\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch.

Es wird gezeigt, dass die Ausrechnung der Differentialgleichung (C.) [580 überflüssig ist, da schon ein gewisses System von Differentialgleichungen für die Entscheidung hinreicht.

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch, aber weder ein Integral derselben noch ein Integral der Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ Wurzel einer rationalen Function, so sind die Nenner der rationalen Zahlen, welche die Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten und zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) liefern, nicht grösser als zehn.

Sind die sämmtlichen Nenner grösser als 2, aber von 4 verschieden, und wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differentialgleichung (B.) die Wurzel einer rationalen Function oder kein algebraisches Integral.

Sind die sämmtlichen Nenner gleich 2 und die Integrale in der Umgebung der einzelnen singulären Punkte von Logarithmen frei, so wird die Differentialgleichung (B.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt.

Schliesslich wird noch gezeigt, dass die Betrachtung der Differentialgleichung (C.) durch eine directe Untersuchung der Formen selber ersetzt werden kann, wenn man die in meiner Abhandlung (Borchardts Journal für r. u. a. Math. Bd. 75, S. 208 sqq.[1])) gegebenen Coefficienten der [581 linearen homogenen Relationen, die zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen bestehen, herbeizieht.

Die in der gegenwärtigen Abhandlung befolgte Methode ist einer Ausdehnung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung fähig, die ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

Heidelberg im Juli 1875.

1) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 394 ff. Sch.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 6, Zeile 12 wurde »bilden« eingeschoben;

„ 6, „ 8, 7 v. u. lauten im Original: Ist N die geringste Anzahl der Glieder, welche das reducirte Wurzelsystem der u. s. w.;

Nach den vom Verfasser in der zweiten Note (Gött. Nachrichten, 1875, S. 612—613*)) gemachten Angaben wurden

S. 8, Zeile 14, 15 die Worte: »höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades« eingeschaltet,

„ 8, Zeile 17 $N > 2$ statt $N > 1$ gesetzt,

der Satz S. 579, Zeile 1 v. u. bis S. 580, Zeile 5 des Originales durch den im Texte S. 8, Zeile 7 v. u. bis S. 9, Zeile 6 nach S. 613 der zweiten Note wiedergegebenen ersetzt,

S. 9, Zeile 14 v. u. die Worte »oder kein algebraisches Integral« hinzugefügt.

2) Die in dem einleitenden Satze (S. 1) erwähnte Arbeit, von welcher die vorstehende Note einen Auszug giebt, ist die folgende Abh. XX; auch die Abhandlungen XXI—XXIII, XXV beziehen sich auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen. SCH.

*) Diese Note beginnt mit den Worten: In der mit dem obigen Titel versehenen in den »Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften« 1875 No. 21 p. 568 sqq. abgedruckten Notiz haben sich einige Redactionsversehen eingeschlichen, welche ich mir hier zu berichtigen erlaube.

XX.

ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN, UND EINE NEUE ANWENDUNG DER INVARIANTENTHEORIE.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 81, 1876, S. 97—142.)

Wird eine lineare Differentialgleichung durch eine Wurzel einer ratio- [97
nalen Function befriedigt, so ist eine lineare homogene Function der Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen derselben mit constanten Coefficienten Wurzel einer rationalen Function. Sind die sämmtlichen Integrale algebraische Functionen, und bildet man alle diejenigen Werthe, welche ein Integral durch die verschiedenen Umläufe der unabhängigen Variablen annimmt, so ist jede symmetrische Function dieser Werthe eine rationale Function. Da aber jeder dieser Werthe als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Glieder eines Fundamentalsystems dargestellt werden kann, so bin ich auf den Gedanken geführt worden, die mit den Gliedern eines Fundamentalsystems gebildeten Formen näher zu untersuchen. Es ergab sich, dass stets solche Formen angegeben werden können, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function sind, und dass der niedrigste Grad, welcher den Formen der letzteren Art zukommt, eine für alle Fundamentalsysteme sich gleichbleibende Zahl N ist. Wir haben eine Form, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function ist und welche sich nicht in Formen niedrigeren Grades derselben Art zerlegen lässt, eine Primform genannt. Es liess sich nun erwarten, dass die Primformen vom Grade N bei der Untersuchung der algebraischen Glei-

chungen, welchen die Integrale der Differentialgleichung genügen, eine fundamentale Bedeutung haben würden. In der That zeigte sich, dass durch die Betrachtung derselben die wichtigsten Eigenschaften, wodurch diejenigen algebraischen Functionen, welche einer Differentialgleichung von gegebener Ordnung genügen, verknüpft sind, sich aufdecken, und namentlich die Frage sich beantworten liess, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt.

98] Da die Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen sich durch die verschiedenen Umläufe der unabhängigen Variablen in lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten derselben Glieder verwandeln, so werden sich die verschiedenen Werthe, welche eine aus denselben Gliedern gebildete Form durch dieselben Umläufe erhält, durch die Ausführung linearer Substitutionen der Formenargumente erzielen lassen. Dieser Umstand veranlasste mich, die Covarianten dieser Formen in die Untersuchung hereinzuziehen, da die Veränderungen der Covarianten durch lineare Substitutionen mit denen der Form im einfachsten Zusammenhange stehen. Es ergab sich nun hierbei, dass die Covarianten von Formen, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function sind, ebenfalls Wurzeln rationaler Functionen darstellen, und dass daher die Covarianten der Primformen vom Grade N, welche selber von niedrigerem als dem N^{ten} Grade sind, identisch verschwinden müssen. Der weitere Fortgang meiner Untersuchung würde nun eine wesentliche Erleichterung gefunden haben, wenn in der Invariantenlehre das Problem, die Formen n^{ten} Grades zu bestimmen, deren Covarianten von niedrigerem als dem n^{ten} Grade identisch verschwinden, schon gelöst wäre. Da aber dieses nicht der Fall ist, so musste dieses Problem umgangen werden. Es ist mir in der That auch gelungen, durch die Betrachtung der Hesseschen Covariante die Lösung dieses Problems für die vorliegende Untersuchung entbehrlich zu machen.

Ich habe im Folgenden die Untersuchung für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei welchen die zu betrachtenden Formen binäre sind, durchgeführt, und behalte mir die Ausdehnung auf die Differentialgleichungen höherer Ordnung für eine andere Gelegenheit vor. Ich hoffe, dass die neue Anwendung, welche wir hier von der Invariantenlehre auf algebraisch-analytische Untersuchungen gemacht, schon in diesem einfachen Falle nicht unwichtig erscheinen werde.

Von den Resultaten der vorliegenden Arbeit heben wir hier nur hervor den Nachweis, dass für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Grad N nicht höher als der zwölfte sei, und die Methode, die Beschaffenheit der Differentialgleichung anzugeben, damit sie algebraische Integrale besitze, oder, wenn die Differentialgleichung vorgelegt, zu erkennen, ob sie durch algebraische Integrale befriedigt werde.

1. [99

Wir wollen mit Herrn LIOUVILLE (Journ. de l'École Polyt. cah. 22, p. 184) eine Gleichung

$$A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0, \tag{1.}$$

in welcher die Coefficienten $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$ rationale Functionen von z sind irreductibel nennen, wenn sich die linke Seite derselben nicht in Factoren zerlegen lässt, die in Bezug auf u niedrigeren Grades sind und deren Coefficienten ebenfalls rationale Functionen von z sind.

Besitzt die irreductible Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1 und u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Denn der Voraussetzung gemäss genügen u_1 und ju_1 der Gleichung (1.). Es genügen daher wegen der vorausgesetzten Irreductibilität dieser Gleichung die sämmtlichen Wurzeln derselben der Gleichung:

$$A_m j^m u^m + A_{m-1} j^{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_1 ju + A_0 = 0. \tag{2.}$$

In Folge der Irreductibilität der Gleichung (1.) ist A_0, daher auch j von Null verschieden. Es verschwindet aber auch nicht A_m, da der Grad der Gleichung (1.) der m^{te} sein soll. Man hat also:

$$\frac{A_{m-i}}{A_m} = \frac{A_{m-i}}{A_m} j^{-i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

oder

$$A_{m-i} = A_{m-i} j^{-i}, \tag{3.}$$

d. h. entweder

$$A_{m-i} = 0$$

oder

$$j^i = 1.$$

Da aber wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) A_{m-i} nicht für alle angegebenen Werthe von i verschwinden kann, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

Ist j eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist nach Gleichung (3.) $A_{m-i} = 0$ oder von Null verschieden, je nachdem

$$i \text{ nicht } \equiv 0, \text{ mod. } \lambda \quad \text{oder} \quad i \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Da A_0 von Null verschieden ist, so ergiebt sich insbesondere:

Der Exponent λ der primitiven Einheitswurzel j ist ein Divisor von m.

100] 2.

Es werde vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung:

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

mit rationalen Coefficienten ein algebraisches Integral u besitzt, und es sei

$$\text{(1.)} \qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdots + A_0 = 0$$

die irreductible Gleichung mit rationalen Coefficienten, welcher dasselbe genügt.

I. Alsdann sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.) Integrale derselben Differentialgleichung.

Denn aus (1.) ergeben sich $\frac{du}{dz}$ und $\frac{d^2u}{dz^2}$ als rationale Functionen von u und z. Die Substitution derselben in die Differentialgleichung (A.) liefert eine Gleichung zwischen u und z, welcher der Voraussetzung nach eine Wurzel u der Gleichung (1.), also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität dieser Gleichung sämmtliche Wurzeln derselben genügen (vergl. Liouville l. c. und eine Abh. desselben Verfassers in Liouville Journal t. IV, p. 432).

II. Wenn die Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1 und u_2 besitzt, deren Quotient nicht für jeden Werth von z constant ist, so hat die Differentialgleichung (A.) nur algebraische Integrale.

Denn alsdann lässt sich (s. meine Arbeit dieses Journal Bd. 66[1]), No. 2) jedes Integral u in der Form

$$\text{(2.)} \qquad u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

mit constanten Coefficienten c_1 und c_2 darstellen. Der Ausdruck (2.) genügt

[1] Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

aber einer algebraischen Gleichung, welche z. B. dadurch erhalten werden kann, dass man in Gleichung (1.) nach einander u_1 und u_2 für u setzt und zwischen den zwei so gebildeten Gleichungen und Gleichung (2.) u_1 und u_2 eliminirt.

III. Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1.) constant, so ist ein Integral der Differentialgleichung (A.) Wurzel einer rationalen Function.

Ist nämlich u_1 eine Wurzel der Gleichung (1.), so besitzt dieselbe die Wurzeln

$$u_1,\ u_1 j_1,\ u_1 j_2,\ \ldots,\ u_1 j_{m-1},$$

wo $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ nach der vorigen Nummer ganzzahlige Wurzeln der Einheit sind. Es seien $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ resp. $\lambda_1^{te}, \lambda_2^{te}, \ldots, \lambda_{m-1}^{te}$ primitive Wurzeln [101 der Einheit, λ das kleinste Vielfache dieser Zahlen, so sind $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ auch λ^{te} Wurzeln der Einheit. Da nach der vorigen Nummer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ Divisoren von m sind, so ist auch λ Divisor von m. Nun aber sind wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (1.) $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ unter einander und von der Einheit verschieden. Andererseits hat aber die Gleichung

$$x^\lambda = 1$$

nicht mehr als λ verschiedene Wurzeln. Es ergiebt sich demnach $m = \lambda$.

Nach der vorigen Nummer ist $A_{m-i} = 0$, wenn nicht $i \equiv 0$ nach den Moduln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, d. h. wenn nicht i durch λ oder m theilbar ist. Demnach erhält die Gleichung (1.) die Form

$$A_m u^m + A_0 = 0. \tag{3.}$$

Wenn die Differentialgleichung (A.) demnach ein algebraisches Integral u, welches nicht die Wurzel einer rationalen Function ist, besitzt, so sind ihre sämmtlichen Integrale algebraisch. Dieses ergiebt sich aus den Sätzen II. und III. Aus dem letzteren folgt nämlich, dass in diesem Falle die Gleichung (1.), welcher u genügt, mindestens zwei Wurzeln hat, deren Quotient nicht für jedes z constant ist. Dann aber ergiebt sich unsere Behauptung aus dem Satze II.

3.

Die Beurtheilung, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werde,

führt in jedem Falle auf die Frage zurück, ob ein gegebenes System linearer Gleichungen endliche Lösungen besitzt.

Es ist nämlich

$$y = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho}g(z),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ rationale (nicht positive ganze) Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet, der allgemeinste Ausdruck für die Wurzel einer rationalen Function. Für die singulären Punkte $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ wird entweder y oder die Ableitungen von y von einer gewissen Ordnung an unendlich.

Soll also eine lineare Differentialgleichung durch einen solchen Ausdruck befriedigt werden, so müssen $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ mit singulären Punkten der Diffe-
[102] rentialgleichung zusammenfallen. Die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ werden durch gewisse algebraische Gleichungen bestimmt (cf. LIOUVILLE, Journ. de l'École Polyt. cah. 22, p. 154 sqq.). Ergeben sich für diese Grössen rationale Werthe, und substituirt man alsdann den obigen Ausdruck y in die Differentialgleichung, welche von Nennern befreit gedacht wird, so erhält man nach Division mit $(z-a_1)^{\alpha_1-n}(z-a_2)^{\alpha_2-n}\dots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho-n}$, wo n die Ordnung der Differentialgleichung ist, eine Gleichung, welche ausdrückt, dass eine ganze rationale Function von z identisch verschwindet. Setzt man die einzelnen Coefficienten derselben gleich Null, so erhält man ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten von $g(z)$. Je nachdem letztere Gleichungen Lösungen haben oder nicht, hat die gegebene Differentialgleichung die Wurzel einer rationalen Function zum Integral oder nicht.

Es ist selbstverständlich, dass in jedem gegebenen Falle durch besondere Methoden das Verfahren vereinfacht werden kann.

Weit schwieriger ist die Frage, ob eine lineare Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt, welche nicht gleich Wurzeln aus rationalen Functionen sind. Wir wollen uns von jetzt ab mit der letzteren Frage für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigen.

4.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so gehört dieselbe zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner

Arbeit dieses Journal Bd. 66[1]). Sind daher die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$, so ist

$$(1.)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\alpha_1}{z-a_1} + \dfrac{\alpha_2}{z-a_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_\varrho}{z-a_\varrho}, \\ p_0 = \dfrac{\beta_1}{(z-a_1)^2} + \dfrac{\beta_2}{(z-a_2)^2} + \cdots + \dfrac{\beta_\varrho}{(z-a_\varrho)^2} + \dfrac{\gamma_1}{z-a_1} + \dfrac{\gamma_2}{z-a_2} + \cdots + \dfrac{\gamma_\varrho}{z-a_\varrho}, \end{cases}$$

wo die Grössen α, β, γ Constanten bedeuten und $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\varrho = 0$ ist.

Wir nehmen nunmehr an, dass in der Gleichung (A.) p_1 und p_0 diese Form haben, und substituiren in der Gleichung (A.)

$$(2.)\qquad u = \mu y,$$

wo

$$(3.)\qquad \mu = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}\alpha_1}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}\alpha_2}\ldots(z-a_\varrho)^{-\frac{1}{2}\alpha_\varrho},$$

und erhalten für y die Differentialgleichung

$$(B.)\qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Py,$$

wo [103

$$(4.)\qquad P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_0.$$

Da P eine rationale Function ist, welche nur für $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ unendlich wird, so sind auch für die Differentialgleichung (B.) diese Grössen ausschliesslich die singulären Punkte.

Die zum singulären Punkt a_i gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (A.) ist

$$(5.)\qquad r(r-1) + \alpha_i r + \beta_i = 0.$$

Die zu demselben singulären Punkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) ist

$$(6.)\qquad r(r-1) = \tfrac{1}{4}\alpha_i^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_i - \beta_i.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (6.) ergänzen sich zur Einheit.

Setzt man in der Differentialgleichung (B.)

$$z = \frac{1}{t},$$

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

so hat P die Form

$$P = t^2 P_1(t), \tag{7.}$$

wo $P_1(0)$ nicht unendlich ist. Die Differentialgleichung (B.) verwandelt sich in

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} = P_1(t)\, y. \tag{B'.}$$

Demnach ist die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.)

$$r(r-1) + 2r = P_1(0),$$

oder

$$r^2 + r = P_1(0). \tag{8.}$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung (8.) ergänzen sich zur negativen Einheit.

Sind die Wurzeln der Gleichung (5.) rationale Zahlen, so sind α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen.

Denn es sind $1-\alpha_i$ und β_i resp. die Summe und das Product der beiden Wurzeln der Gleichung (5.).

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so sind die Wurzeln der zu jedem der singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen (s. meine Arbeit dieses 104] Journal Bd. 66 No. 6, II.[1])), also die sämmtlichen Grössen α_i und β_i ebenfalls rationale Zahlen. Es ergiebt sich also aus der Form von μ, Gleichung (3.):

Sind die Integrale der Differentialgleichung (A.) sämmtlich algebraisch, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch.

Sind umgekehrt die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, so sind auch die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (A.) algebraisch.

5.

Es sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung:

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 198 f. Sch.

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P.y, \tag{1.}$$

wo P eine beliebige rationale Function von z bedeutet, so ist bekanntlich (vergl. LIOUVILLE in dessen Journal t. IV, p. 428 und meine Arbeit dieses Journal Bd. 66 No. 2[1]))

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dz} & y_1 \\ \frac{dy_2}{dz} & y_2 \end{vmatrix} = C, \tag{2.}$$

wo C eine von Null verschiedene Constante bedeutet. Nach irgend einem Umlaufe von z mögen nun y_1 und y_2 übergehen in y_1', y_2', so ist bekanntlich (s. meine Arbeit Bd. 66 No. 2[1]))

$$\begin{cases} y_1' = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2, \\ y_2' = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2, \end{cases} \tag{3.}$$

wo $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}$ Constanten sind.

Aus Gleichung (2.) ergiebt sich aber

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1'}{dz} & y_1' \\ \frac{dy_2'}{dz} & y_2' \end{vmatrix} = C,$$

d. h.

$$\Delta \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dz} & y_1 \\ \frac{dy_2}{dz} & y_2 \end{vmatrix} = C, \tag{4.}$$

wo die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$ [105

mit Δ bezeichnet worden ist. Aus den Gleichungen (2.) und (4.) folgt:

I. Die Substitutionsdeterminante Δ ist für jeden Umlauf von z der Einheit gleich.

Es sei $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine mit y_1, y_2 gebildete Form, d. h. eine ganze homogene Function von y_1, y_2 mit constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots$, $\varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ eine Covariante der Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 164 ff. Sch.

Wenn durch eine Substitution

$$(5.) \qquad \begin{cases} y_1 = k_{11}Y_1 + k_{12}Y_2, \\ y_2 = k_{21}Y_1 + k_{22}Y_2 \end{cases}$$

$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ in $f(Y_1, Y_2, A, B, C, \ldots)$ übergeht, so ist den Eigenschaften der Covarianten gemäss:

$$(6.) \quad \varphi(k_{11}Y_1+k_{12}Y_2, k_{21}Y_1+k_{22}Y_2, a, b, c, \ldots) = (k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})^\lambda \varphi(Y_1, Y_2, A, B, C, \ldots),$$

wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wenn Y_1, Y_2 resp. mit y_1, y_2 zusammenfallen, also

$$f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots) \text{ in } f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots)$$

übergeht, so ist auch

$$(6a.) \quad \varphi(k_{11}y_1+k_{12}y_2, k_{21}y_1+k_{22}y_2, a, b, c, \ldots) = (k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})^\lambda \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots).$$

Ist die Substitution (5.) mit der Substitution (3.) identisch, so ergiebt sich nach Satz I.:

$$(7.) \quad \varphi(\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2, \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2, a, b, c, \ldots) = \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots).$$

Diese Gleichung ist eine in Bezug auf y_1, y_2 identische, da sich sonst aus derselben für $\frac{y_2}{y_1}$ ein constanter Werth ergeben würde, was der Voraussetzung widerstritte, da y_1, y_2 ein Fundamentalsystem bilden. Es sei nunmehr insbesondere

$$(8.) \qquad f(y_1, y_2, A, B, C, \ldots) = \gamma f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

wo γ eine Constante bedeutet, so ist auch diese Gleichung in Bezug auf y_1, y_2 identisch, so dass

$$A = \gamma a, \quad B = \gamma b, \quad C = \gamma c, \quad \ldots;$$

106] also auch, da die Covariante in Bezug auf die Coefficienten der Form homogen ist:

$$(9.) \qquad \varphi(y_1, y_2, A, B, C, \ldots) = \gamma^k \varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

wo k eine positive ganze Zahl bedeutet. Es ergiebt sich alsdann aus Gleichung (7.)

$$(10.) \quad \varphi(\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2, \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2, a, b, c, \ldots) = \gamma^k \varphi(y_1, y_2, a, b, c, \ldots),$$

d. h.

II. Wenn nach irgend einem Umlauf der Variablen z die Form $f(y_1, y_2, a, b, c, \ldots)$ in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt übergeht, so wird sich nach demselben Umlauf jede Covariante dieser Form ebenfalls in sich selbst mit einer Potenz derselben Constanten multiplicirt verwandeln.

Da eine Form $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist, durch einen beliebigen Umlauf von z in sich selbst mit einer Einheitswurzel multiplicirt übergeht, so folgt aus Satz II., dass auch die Covariante einer solchen Form durch einen beliebigen Umlauf in sich selbst mit einer Einheitswurzel multiplicirt übergeht. Sind nun y_1, y_2 Integrale der Differentialgleichung (B.), so wird die Covariante unendlich nur von einer endlichen Ordnung, da y_1 und y_2 diese Eigenschaft besitzen (s. meine Arbeit Bd. 66 No. 4 [1]). Da nun eine Function, welche durch einen beliebigen Umlauf der unabhängigen Variablen in sich selbst mit Einheitswurzeln multiplicirt übergeht und überall von endlicher Ordnung unendlich wird, eine Wurzel einer rationalen Function ist, so ergiebt sich der Satz:

III. Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.), so ist die Covariante jeder Form $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist, ebenfalls Wurzel einer rationalen Function.

6.

Sind wieder y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) voriger Nummer, so ergiebt sich aus der Gleichung (2.) derselben Nummer

$$(1.) \qquad \frac{y_2}{y_1} = -C\int\frac{dz}{y_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{y_2} = C\int\frac{dz}{y_2^2}.$$

Es werde von jetzt ab vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Integrale derselben Differentialgleichung algebraische Functionen von z sind, alsdann ist auch $\frac{y_2}{y_1}$ eine algebraische Function von z, demnach nach Gleichung (1.)

$$(2.) \qquad \int\frac{dz}{y_1^2}, \quad \int\frac{dz}{y_2^2} \qquad [107$$

algebraische Functionen von z.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 178 ff. Sch.

Nach einem Satze von ABEL (dieses Journal Bd. 4, p. 264, oder Oeuvres compl. 1. Th. p. 355[1]), vergl. auch LIOUVILLE, Journal de l'École Polyt. cah. 22 p. 147) müssen unter diesen Voraussetzungen die Integrale (2.) rationale Functionen von z und resp. der algebraischen Function $\frac{1}{y_1^2}$ oder $\frac{1}{y_2^2}$ sein. Hieraus folgt, dass y_2 eine rationale Function von z und y_1 und umgekehrt y_1 eine rationale Function von z und y_2 ist. Ist der Quotient von y_1 und y_2 für jedes z constant, so sind y_1 und y_2 ebenfalls rationale Functionen von einander. Es ergiebt sich demnach der Satz:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraische Functionen von z, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale derselben Differentialgleichung.

7.

I. Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.) und m der Grad der irreductiblen Gleichung, welcher y genügt, so lässt sich bekanntlich jede rationale Function $\varphi(y)$ von y und z stets und nur auf eine Weise in die Form

$$\varphi(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{m-1} y^{m-1} \tag{1.}$$

bringen, wo $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ rationale Functionen von z sind. Demnach hat jedes andere Integral y_1 ausser y nach voriger Nummer die Gestalt:

$$y_1 = \varphi(y). \tag{2.}$$

Ist $\frac{y_1}{y}$ nicht für jedes z constant, so lässt sich bekanntlich (s. No. 2) jedes dritte Integral durch die Form

$$\alpha y + \beta \varphi(y) \tag{3.}$$

darstellen, wo α und β Constanten bedeuten.

Wir nehmen nun an, dass auf einem gewissen Wege y in yj übergeht, so genügt yj der irreductiblen Gleichung für y, und es ist deshalb nach No. 1 j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit. Das Integral $\varphi(y)$ geht alsdann auf demselben Wege in $\varphi(yj)$ über. Da $\varphi(yj)$ ein Integral der Differentialgleichung

[1]) Nouvelle édition, t. I (1881) S. 550. Sch.

(B.) ist, so muss dasselbe die Form (3.) haben, also

(4.) $$\varphi(yj) = \alpha y + \beta\varphi(y)$$

sein. Die dem angegebenen Wege entsprechende Substitution des Funda- [108
mentalsystems $y, \varphi(y)$ ist daher

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Die Determinante Δ dieser Substitution ist nach Satz I. No. 5 der Einheit gleich. Demnach ist

(5.) $$\beta = j^{-1},$$

und man erhält

(6.) $$\varphi(yj) = \alpha y + j^{-1}\varphi(y).$$

Wegen der Irreductibilität der Gleichung, welcher y genügt, folgt hieraus:

(7.) $$c_i j^i = c_i j^{-1}, \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, m-1)$$

(7a.) $$c_1 j = \alpha + c_1 j^{-1}.$$

Ist j eine primitive l^{te} Wurzel der Einheit, so ergeben die Gleichungen (7.) und (7a.)

(8.) $c_i = 0$, wenn nicht $i = 1$ oder $i \equiv -1$, mod. l.

Es sei daher

(9.) $$\psi(y^l) = c_0 + c_1 y^l + \cdots + c_{\left(\frac{m}{l}-1\right)l}\, y^{\left(\frac{m}{l}-1\right)l}$$

$\left(\frac{m}{l}\right.$ ist eine ganze Zahl, da nach No. 1 l ein Divisor von m ist$\left.\right)$, so ist

(10.) $$\varphi(y) = c_1 y + y^{l-1}\psi(y^l),$$

und jedes Integral hat die Form

(11.) $$(\alpha' + \beta' c_1) y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l).$$

Ist j eine höhere Einheitswurzel als die zweite, so folgt aus Gleichung (7a.), dass c_1 eine Constante

(12.) $$c_1 = \frac{\alpha}{j - j^{-1}}.$$

Es ergiebt die Gleichung (10.), dass

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ein Integral der Differentalgleichung (B.) ist.

Es bilden auch, wenn nicht $\psi(y^l)$ identisch Null ist, y und $y^{l-1}\psi(y^l)$ ein Fundamentalsystem, da $y^{l-1}\psi(y^l)$ nicht einer Constanten gleich ist.

Ist aber

$$j^s = 1, \tag{13.}$$

so ist $\alpha = 0$.

109] Es ist also immer

$$\alpha = c_1(j - j^{-1}). \tag{14.}$$

Im zweiten Falle hat nach Gleichung (10.) jedes Integral die Form

$$y\psi(y^s).$$

II. Es sei $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches nicht gleich y mit einer Constanten multiplicirt, und von der Beschaffenheit, dass

$$F(yj^k) = \varepsilon F(y), \tag{15.}$$

wo ε eine constante Grösse. Da ein gewisser Weg y in yj überführt, so führt auch ein Weg (welcher der $k$maligen Wiederholung des ersteren aequivalent ist) y in yj^k über. Der letztere führt aber nach der Voraussetzung $F(y)$ in $\varepsilon F(y)$ über. Es ist daher die zu diesem Wege gehörige Substitution des Fundamentalsystems y, $F(y)$

$$\begin{pmatrix} j^k & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Da nach No. 5 Satz I die Determinante dieser Substitution gleich der Einheit ist, so ergiebt sich:

$$\varepsilon = j^{-k}. \tag{16.}$$

Da aber $F(y)$ die Form (11.) hat, so ist:

$$F(y) = (\alpha' + \beta' c_1)y + \beta' y^{l-1}\psi(y^l). \tag{17.}$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (15.) und (16.) folgt:

$$(\alpha' + \beta' c_1)yj^k + \beta' y^{l-1}j^{-k}\psi(y^l) = j^{-k}(\alpha' + \beta' c_1)y + j^{-k}\beta' y^{l-1}\psi(y^l). \tag{18.}$$

Es ergiebt sich hieraus entweder

(19.) $$\alpha' + \beta' c_k = 0 \quad (k \text{ unbestimmt})$$

oder

(19a.) $$j^{2k} = 1, \text{ d. h. } 2k \equiv 0, \text{ mod. } l.$$

Im Falle (19.) ist

(20.) $$F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l).$$

Im Falle (19a.) ist:

1) wenn l ungerade, $k \equiv 0$, mod. l, also $j^k = 1$, $\varepsilon = 1$, d. h. die Gleichung (15.) ist die selbstverständliche

$$F(y) = F(y);$$

2) wenn l gerade, so würde $k \equiv \frac{l}{2}$, mod. l sein können, d. h. $j^k = -1$ [110 und $\varepsilon = -1$, und die Gleichung (15.)

(15a.) $$F(-y) = -F(y).$$

Fasst man dieses zusammen, so erhält man den Satz:

Die Gleichung (15.) erfordert, dass $\varepsilon = j^{-k}$, und sie besteht für ein nicht durch l theilbares k nur dann, wenn entweder $F(y)$ die Form $\beta' y^{l-1} \psi(y^l)$ hat, oder wenn l eine gerade Zahl und $k \equiv \frac{l}{2}$, mod. l, also $\varepsilon = -1$ ist.

III. Es sei $F(y)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten, und es sei

(21.) $$F(yj^p) = \varepsilon F(yj^q),$$

wo p und q ganze Zahlen, ε eine Constante ist. Diese Gleichung wird von jeder Wurzel der irreductiblen Gleichung für y, also wenn yj^{-q} für y gesetzt wird, befriedigt; es ist also:

(22.) $$F(yj^{p-q}) = \varepsilon F(y).$$

Es ergiebt sich daher aus dem Satze in II. dieser Nummer:

Die Gleichung (21.) erfordert, dass $\varepsilon = j^{q-p}$, und sie besteht, wofern nicht $p \equiv q$, mod. l, nur dann, wenn entweder $F(y)$ die Form $\beta' y^{l-1} \psi(y^l)$ hat, oder wenn l eine gerade Zahl ist und $p - q \equiv \frac{l}{2}$, mod. l, also $\varepsilon = -1$ ist.

IV. 1) Ist

$$F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l), \tag{23.}$$

so ist

$$F(yj^k) = j^{-k} F(y) \tag{24.}$$

für jedes ganzzahlige k, und die Glieder der Reihe

$$F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F(yj^{l-1}) \tag{25.}$$

sind nur um constante Factoren von einander verschieden.

2) Ist l eine ungerade Zahl, $F(y)$ ein beliebiges Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und nicht von der Form (23.), so ist nach II. und III. kein Glied der Reihe (25.) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist l eine gerade Zahl und $F(y)$ ein wie in 2) beschaffenes Integral, so sind die Glieder der Reihe

111] $$F(y),\ F(yj),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right) \tag{25a.}$$

nicht um nur constante Factoren verschieden, dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i). \tag{26.}$$

8.

Der Grad der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher ein Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe.

Es sei y ein algebraisches Integral, m der Grad der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, y_1 irgend ein anderes Integral, so ist nach No. 6 y_1 eine rationale Function $\varphi(y)$ von y und z. Da m die Anzahl der verschiedenen Werthe ist, die y durch alle möglichen Umläufe von z erhält, so nimmt y_1 durch alle möglichen Umläufe von z eine Anzahl m' verschiedener Werthe an, die nicht grösser ist als m. Bildet man eine Gleichung m'^{ten} Grades, welcher diese m' Werthe genügen, so sind die Coefficienten derselben rationale Functionen von z. Dieselbe Gleichung befriedigen die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen Gleichung, welcher y_1 genügt. Es ist daher der Grad m_1 der letzteren Gleichung nicht grösser als m', also auch nicht

grösser als m. Andererseits ist aber nach No. 6 auch y eine rationale Function von y_1 und z. Es ergiebt sich daher ebenso, dass m nicht grösser als m_1. Es ist demnach $m = m_1$, wie behauptet worden.

Man könnte daher mit Recht m den zur Differentialgleichung (B.) gehörigen Grad nennen.

9.

Es sei y ein Integral der Differentialgleichung (B.), und

$$A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_0 = 0 \tag{1.}$$

die irreductible Gleichung, welcher y genügt. Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ die $m-1$ übrigen Wurzeln der Gleichung (1.). Unter den Wurzeln derselben Gleichung seien $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient irgend zweier derselben für jedes z constant ist. Wir wollen $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem der Gleichung (1.) nennen.

Es kann eintreten, dass $n = m$.

Ist aber $n < m$, so ist nach No. 1 jede nicht zum reducirten Wurzelsystem gehörige Wurzel gleich einer des reducirten Systems mit einer [112 ganzzahligen Wurzel der Einheit multiplicirt.

I. Sind diese Multiplicatoren resp. l^{te}, l_1^{te}, l_2^{te}, etc. primitive Wurzeln der Einheit j, j_1, j_2, etc., und unter den Zahlen l, l_1, l_2, etc. l die grösste, so liefert das System:

$$y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \ldots,\ y_i j^{l-1} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2.}$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1.).

Ist nämlich η_i eine beliebige Wurzel der Gleichung (1.) und genügt derselben der Werth $\eta_i j_\varkappa$, so genügt ihr auch wegen ihrer Irreductibilität $\eta_i' j_\varkappa$, wo η_i' eine beliebige andere Wurzel derselben ist. Aus demselben Grunde genügt ihr auch $\eta_i j_\varkappa^a$, für ein beliebiges ganzzahliges a. Es ist demnach allgemein

$$y_i j^a j_\varkappa^b \tag{3.}$$

eine der Wurzeln der Gleichung (1.), wenn a, b beliebige ganze Zahlen und i eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ bedeutet.

Es sei nun das kleinste Vielfache von l und $l_\varkappa$ gleich λ, und g eine

primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, so ist

$$(4.) \qquad j = g^{r\frac{\lambda}{l}}, \quad j_\varkappa = g^{r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}},$$

wo r und r' resp. relativ prim zu l und $l_\varkappa$ sind. Man hat also

$$(5.) \qquad j^{\mathfrak{a}} j_\varkappa^{\mathfrak{b}} = g^{r\mathfrak{a}\frac{\lambda}{l}+r'\mathfrak{b}\frac{\lambda}{l_\varkappa}}.$$

Nun aber sind $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ relativ prim, ferner ist r zu $\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ relativ prim, folglich ist $r\frac{\lambda}{l}$ zu $\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ relativ prim. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und $r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ ist also der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und r'. Nun ist r' zu $\frac{\lambda}{l}$ relativ prim, demnach ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von $r\frac{\lambda}{l}$ und $r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von r und r', also zu l und $l_\varkappa$, und demnach auch zu λ relativ prim. Derselbe sei τ, so können bekanntlich ganze Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so bestimmt werden, dass

$$(6.) \qquad r\frac{\lambda}{l}\mathfrak{a} + r'\frac{\lambda}{l_\varkappa}\mathfrak{b} = \tau$$

wird. Es ergiebt sich alsdann für diese Werthe $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus Gleichung (5.)

113] $$(7.) \qquad j^{\mathfrak{a}} j_\varkappa^{\mathfrak{b}} = g^{\tau}.$$

Wir behaupten nun, dass $\lambda = l$ sei. Denn wenn dieses nicht stattfände, so wäre $\lambda > l$, und es ergäbe sich aus der Gleichung (7.), dass die Gleichung (1.) eine Wurzel $y_s g^\tau$ hätte, wo g^τ eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, also von höherer als der l^{ten} Ordnung wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Man schliesst hieraus:

Die Zahl l ist ein Vielfaches der Zahlen l_1, l_2, etc.

Daher sind j_1, j_2, etc. in der Reihe

$$j^0, j^1, j^2, \ldots, j^{l-1}$$

enthalten. Da aber nach No. 1 die sämmtlichen Grössen der Reihe (2.) Wurzeln der Gleichung (1.) sind, und diese Gleichung wegen ihrer Irreductibilität nur ungleiche Wurzeln hat, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen l den Index der Gleichung (1.) oder des reducirten Wurzelsystems derselben nennen. Wir haben alsdann den Satz:

II. Das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems der Gleichung (1.) in den Index derselben ist gleich dem Grade der Gleichung.

III. Wenn durch irgend einen Umlauf von z zwei verschiedene Glieder y_i und y_k des reducirten Wurzelsystems gleichzeitig in $y_{i'} \cdot j^{\alpha}$ und $y_{k'} \cdot j^{\beta}$ übergehen, wo $y_{i'}$ und $y_{k'}$ ebenfalls Glieder des reducirten Wurzelsystems sind, so sind $y_{i'}$ und $y_{k'}$ ebenfalls verschieden.

Denn durch einen dem angegebenen Umlauf entgegengesetzten Umlauf gehen gleichzeitig $y_{i'}$ in $j^{-\alpha} y_{i'}$ und $y_{k'}$ in $j^{-\beta} y_{k'}$ über. Wäre nun $i' = k'$, so müsste

$$j^{-\alpha} y_{i'} = j^{-\beta} y_{k'}$$

oder

$$y_{k'} = j^{\beta-\alpha} y_{i'}$$

sein, gegen die Voraussetzung.

10.

Es sei η_i ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), welches einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades genügt, $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem dieser Gleichung und l der Index derselben. Da die sämmtlichen Wurzeln Integrale der Differentialgleichung (B.) sind, so lassen sie sich als lineare homogene Functionen eines beliebigen Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2 mit constanten Coefficienten darstellen. Es sei also:

$$\eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.}$$

Wir bilden die Form n^{ten} Grades: [114

$$f(y_1, y_2) = (A_{01} y_1 + A_{02} y_2)(A_{11} y_1 + A_{12} y_2) \ldots (A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2), \tag{2.}$$

so wird $f(y_1, y_2)$ durch einen beliebigen Umlauf von z in sich selbst, multiplicirt mit einer l^{ten} Einheitswurzel, übergehen. Da dieselbe Function überall nur von endlicher Ordnung unendlich wird, so ergiebt sich:

I. Die Form $f(y_1, y_2)$ ist Wurzel einer rationalen Function von z, deren Exponent höchstens gleich l.

II. Ist umgekehrt eine Form $F(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von z und

$$\eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2$$

ein Factor der Form, und bilden $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ ein reducirtes Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung, welcher η genügt, so ist η_i von der Gestalt:

$$\eta_i = A_{i1} y_1 + A_{i2} y_2$$

und die Form $F(y_1, y_2)$ enthält auch die Factoren $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

Denn bezeichnet man den durch irgend einen Umlauf von z erhaltenen Werth von $F(y_1, y_2)$ mit $F'(y_1, y_2)$, so ist der Voraussetzung gemäss

$$F'(y_1, y_2) = \varepsilon F(y_1, y_2), \tag{3.}$$

wo ε eine ganzzahlige Einheitswurzel ist. Diese Gleichung ist eine identische, da sich sonst für $\frac{y_2}{y_1}$ ein für jedes z constanter Werth ergäbe. Es verschwinden daher beide Seiten der Gleichung für dieselben Werthe des Verhältnisses $\frac{y_2}{y_1}$. Wenn nun durch den angegebenen Umlauf η in η_i übergeführt wird, so enthält die linke Seite den Factor η_i, folglich auch die rechte. Da es aber stets Wege giebt (s. PUISEUX in LIOUVILLES Journal t. XV), welche die Wurzel einer irreductiblen Gleichung in jede andere Wurzel derselben überführen, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen eine Form, welche nur solche Factoren enthält, die zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Factoren alle und jeden zur ersten Potenz, eine Primform nennen.

Aus dem Satze I. ergiebt sich dann:

III. Jede Primform ist Wurzel einer rationalen Function.

Aus dem Satze II. folgt aber:

IV. Haben zwei Primformen einen gemeinschaftlichen Linearfactor, so sind sie bis auf einen constanten Factor identisch.

115] V. Ist eine Form $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, so lässt sich dieselbe in ein Product von Primformen zerlegen.

Denn ist η einer der Factoren der Form, und bilden $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ zusammen mit η das reducirte Wurzelsystem der irreductiblen Gleichung, welcher η genügt, so ist nach dem Satze II. $f(y_1, y_2)$ durch die Primform

$$\varphi(y_1, y_2) = \eta \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{n-1}$$

theilbar. Nach dem Satze III. ist aber $\varphi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen

Function, also auch die Form

$$f'(y_1, y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{\varphi(y_1, y_2)}$$

Wurzel einer rationalen Function. Durch Fortsetzung desselben Schlusses in Bezug auf $f'(y_1, y_2)$ u. s. w. ergiebt sich unser Satz von selbst.

Man hat also, wenn $\varphi(y_1, y_2)$, $\varphi_1(y_1, y_2)$, $\varphi_2(y_1, y_2)$, ... Primformen sind,

$$f(y_1, y_2) = C\varphi(y_1, y_2)\varphi_1(y_1, y_2)\varphi_2(y_1, y_2)\cdots, \tag{4.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Als Corollar ergiebt sich der Satz:

VI. Ist eine Form $f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, so enthält sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft.

In der That, die Form enthalte den Factor η genau zur λ^{ten} Potenz, so müssen, da jede Primform in Gleichung (4.) jeden ihrer Factoren nur einfach enthält, genau λ Primformen in dem Producte auf der rechten Seite dieser Gleichung den Factor η enthalten. Diese Primformen sind aber nach Satz IV. bis auf einen constanten Factor identisch, folglich ist $f(y_1, y_2)$ genau durch die λ^{te} Potenz einer Primform, welche η enthält, theilbar, also auch genau durch die λ^{te} Potenz jedes Factors derselben.

11.

Es sei m der zur Differentialgleichung (B.) gehörige Grad.

Die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher ein Integral y der Differentialgleichung (B.) genügt, ist im Allgemeinen für die verschiedenen Integrale verschieden. Der geringste Werth, welchen diese Anzahl annehmen kann, sei N, und der Index der irreductiblen Gleichung, welcher die Glieder eines reducirten Wurzelsystems von der Anzahl N genügen, sei L, so ist nach Satz II. No. 9

$$m = NL.$$

I. Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Form [116 $f(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist.

Dieser Satz ist eine Folgerung des Satzes II. voriger Nummer, aus welchem sich ergiebt, dass jede Form, welche Wurzel einer rationalen Function ist, mindestens so viel Linearfactoren enthält, als die Anzahl der Glieder eines reducirten Wurzelsystems beträgt. Die aus dem Product der Glieder eines reducirten Wurzelsystems von der Anzahl N gebildete Form ist nach Satz III. voriger Nummer eine Form N^{ten} Grades, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function.

II. Eine Form $F(y_1, y_2)$, welche Wurzel einer rationalen Function ist und den niedrigsten Grad N hat, ist eine Primform N^{ten} Grades.

Wäre nämlich $F(y_1, y_2)$ nicht Primform, so liesse sich diese Form nach Satz V. voriger Nummer in ein Product von Primformen zerlegen. Diese Primformen müssten aber von niedrigerem Grade als dem N^{ten} sein, was dem Satz III. voriger Nummer und dem Satze I. dieser Nummer widerspäche.

12.

Die Hessesche Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ einer Primform $\Phi(y_1, y_2)$ des N^{ten} Grades ist ebenfalls eine Primform.

Nach dem Satze III. No. 10 ist $\Phi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function, folglich nach Satz III. No. 5 auch $\Psi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function. Diese Form ist bekanntlich vom $(2N-4)^{\text{ten}}$ Grade. Wäre sie keine Primform, so liesse sich dieselbe nach Satz V. No. 10 in ein Product von Primformen zerlegen. Von diesen müsste aber wenigstens eine von niedrigerem Grade als dem N^{ten} sein, was nicht möglich ist.

Wir können im Folgenden voraussetzen, dass die Hessesche Covariante einer Primform N^{ten} Grades nicht identisch verschwindet. Denn das identische Verschwinden der Hesseschen Covariante einer binären Form hat zur Folge, dass die Form der Potenz einer linearen homogenen Function ihrer Argumente gleich wird. Es würde demnach schon eine lineare homogene Function zweier Integrale Wurzel einer rationalen Function werden, d. h. $N = 1$ sein.

13.

Es sei eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete quadratische Form von ungleichen Linearfactoren

$$a_0 y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2 = \varphi(s), \tag{1.}$$

wo $\varphi(z)$ Wurzel einer rationalen Function. Setzen wir [117

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_2}{y_1} = u, \\ a_0 + a_1 u + a_2 u^2 = f(u), \end{cases}$$

so folgt aus (1.)

$$(3.)\qquad f(u) = \frac{\varphi(z)}{y_1^2}.$$

Bezeichnet man die logarithmischen Ableitungen von $f(u)$ nach u und von $\varphi(z)$ nach z resp. mit $f_1(u)$, $\varphi_1(z)$, so folgt durch Differentiation der Gleichung (3.) mit Rücksicht auf Gleichung (1.) No. 6:

$$(4.)\qquad -Cf_1(u) = y_1^2\varphi_1(z) - 2y_1\frac{dy_1}{dz}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und abermalige Berücksichtigung der Gleichung (1.) No. 6, und mit Benutzung der Differentialgleichung (B.) folgt:

$$(5.)\qquad C^2\frac{df_1(u)}{du} = 2y_1^2\varphi_1(z)\frac{dy_1}{dz} + y_1^4\left[\frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 2P\right] - 2y_1^2\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2.$$

Durch Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus den Gleichungen (4.) und (5.) ergiebt sich:

$$(6.)\qquad C^2\left[2\frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] = y_1^4\left[\varphi_1(z)^2 + 2\frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 4P\right].$$

Substituirt man hierin den Werth y_1 aus Gleichung (3.), so folgt:

$$C^2\left[2f(u)\frac{d^2f(u)}{du^2} - \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2\right] = \varphi(z)^2\left[\varphi_1(z)^2 + 2\frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 4P\right]$$

oder

$$(7.)\qquad \lambda = \varphi(z)^2\left[\varphi_1(z)^2 + 2\frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 4P\right],$$

wo λ den constanten Werth $C^2(4a_0a_2 - a_1^2)$ bedeutet.

Die Constante λ ist von Null verschieden, da C nach No. 5 nicht verschwindet und die quadratische Form ungleiche Factoren enthält. Wie man unmittelbar sieht, ist diese Constante von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.

Sind P und $\varphi(z)$ gegeben, so bestimmt sich λ aus Gleichung (7.) am zweckmässigsten durch Substitution eines besonderen Werthes für z.

Da der Factor von $\varphi(z)^2$ in Gleichung (7.) eine rationale Function von z ist, so ergiebt sich zunächst:

I. Das Quadrat von $\varphi(z)$ ist eine rationale Function.

Setzen wir

$$(8.) \qquad -\frac{\lambda}{4\varphi(z)^2} = \psi(z),$$

118] so ergiebt sich aus Gleichung (7.)

$$(9.) \qquad P = \frac{5}{16}\left(\frac{d\log\psi(z)}{dz}\right)^2 - \frac{1}{4\psi(z)}\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \psi(z).$$

II. Die Differentialgleichung (B.) hat in diesem Falle das Fundamentalsystem von Integralen:

$$(10.) \qquad y_1 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}} e^{\int\sqrt{\psi(z)}\,dz}, \quad y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int\sqrt{\psi(z)}\,dz}.$$

Diese Integrale sind dann und nur dann algebraisch, wenn $\int\sqrt{\psi(z)}\,dz$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function ist.

In dem Falle, dass y_1, y_2 algebraisch sind, haben sie, wie sich aus der Abhandlung von ABEL (Oeuvres compl. t. I, p. 350 sqq.[1]) ergiebt, die Form:

$$(11.) \qquad \begin{cases} y_1 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}[p + q\sqrt{\psi(z)}]^{\alpha}, \\ y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{4}}[p + q\sqrt{\psi(z)}]^{-\alpha}, \end{cases}$$

wo p, q rationale Functionen von z, α eine rationale Zahl ist.

Die Entscheidung hierüber erfolgt auf bekannte Weise.

Wir haben also unsere fernere Untersuchung nur auf die Fälle $N > 2$ auszudehnen.

14.

Es sei wieder $\Psi(y_1, y_2)$ die HESSEsche Covariante der Primform N^{ten} Grades $\Phi(y_1, y_2)$, und es werde $N > 2$ vorausgesetzt. Da diese Covariante eine Primform ist (s. No. 12), so bilden ihre Linearfactoren das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades (s. No. 10), dessen Gliederzahl $2N-4$ ist. Der Index dieser Gleichung sei L', so ist nach Satz II. No. 9 und No. 11

$$(1.) \qquad (2N-4)L' = m = LN.$$

[1]) Nouvelle édition, t. I (1881) S. 545 ff. Sch.

Es bedeute nun η einen Linearfactor von $\Phi(y_1, y_2)$, J eine primitive L^{te} Wurzel der Einheit, ζ einen beliebigen Linearfactor von $\Psi(y_1, y_2)$. Da η und ζ Integrale der Differentialgleichung (B.) sind, so ist ζ nach No. 6 eine rationale Function von η und z.

Es sei der Factor $\zeta = F(\eta)$ so beschaffen, dass

$$F(\eta) = \beta \eta^{L-1} \psi(\eta^L), \tag{2.}$$

wo

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_L \eta^L + c_{2L} \eta^{2L} + \cdots + c_{(N-1)L} \eta^{(N-1)L} \tag{3.}$$

(s. No. 7), so geht durch einen Umlauf, welcher η in ηJ überführt, $F(\eta)$ in $J^{-1}F(\eta)$ über. Es genügt daher der irreductiblen Gleichung, welche [119 ζ befriedigt, auch ζJ^{-1}. Nach Satz I. No. 9 ist demnach

$$L' \geqq L. \tag{4.}$$

Ist 1) $N \geqq 4$, so ist

$$N \leqq 2N - 4.$$

Es folgt also aus (1.) und (4.), dass nur

$$L' = L \quad \text{und} \quad N = 4$$

sein kann.

Ist 2) $N = 3$, so ergiebt die Gleichung (1.)

$$3L = 2L'. \tag{5.}$$

Es ist also $L' > L$. In diesem Falle ist aber nach Satz I. No. 9 L ein Divisor von L', also $2\frac{L'}{L}$ eine gerade Zahl, daher kann die Gleichung (5.) oder

$$3 = 2\frac{L'}{L}$$

nicht bestehen.

Hat also ein Linearfactor ζ der Hesseschen Covariante die Form (2.), so ist $N = 4$.

Hierher gehört auch der Fall $L = 1$, da in diesem Falle jedes Integral die Form (2.) hat. Aus Gleichung (1.) folgt

$$L'(2N-4) = N, \tag{6.}$$

also

$$N = 2 + \frac{2}{2L'-1},$$

eine Gleichung, welche in ganzen Zahlen nur bestehen kann, wenn

$$L' = 1, \quad N = 4.$$

Ist endlich ein Factor ζ der HESSEschen Covariante gleich $\alpha\eta$, wo α eine Constante, so ist nach Satz IV. No. 10 und nach No. 12 diese Covariante von $\Phi(y_1, y_2)$ nur um einen constanten Factor verschieden, also:

$$2N-4 = N,$$

d. h. wieder

$$N = 4. \tag{7.}$$

15.

Es mögen die Bezeichnungen der vorigen Nummer beibehalten werden, aber es werde vorausgesetzt, dass keiner der Factoren ζ die Form $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$ habe, oder gleich η multiplicirt mit einer Constanten sei.

120] Es ist alsdann nach No. 7, IV. kein Glied der Reihe:

$$F(\eta),\ F(\eta J),\ F(\eta J^2),\ \ldots,\ F(\eta J^{\lambda-1}), \tag{1.}$$

wo $\zeta = F(\eta)$ und $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade, gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Demnach sind die Glieder der Reihe (1.) Glieder des reducirten Wurzelsystems der irreductiblen Gleichung, welcher ζ genügt, also sämmtlich Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$.

Ist $F_1(\eta)$ ein Linearfactor von $\Psi(y_1, y_2)$, welcher keinem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt gleich ist, so ist auch $F_1(\eta J^a)$ für ein beliebiges ganzzahliges a nicht gleich einem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt.

Denn aus der Gleichung

$$F_1(\eta J^a) = \varepsilon F(\eta J^b),$$

wo ε eine Constante ist, würde sich wegen der Irreductibilität der Gleichung für η ergeben:

$$F_1(\eta) = \varepsilon F(\eta J^{b-a}),$$

gegen die Voraussetzung.

Es ist also keines der Glieder der Reihe

$$F_1(\eta),\ F_1(\eta J),\ \ldots,\ F_1(\eta J^{\lambda-1}) \tag{2.}$$

gleich einem Gliede der Reihe (1.) mit einer Constanten multiplicirt. Es ist aber auch nach No. 7, IV. kein Glied der Reihe (2.) gleich einem anderen derselben Reihe mit einer Constanten multiplicirt. Die Glieder dieser Reihe sind also neue Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung für ζ, also sämmtlich Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$.

In ähnlicher Weise würde aus der Existenz eines Linearfactors $F_2(\eta)$ von $\Psi(y_1, y_2)$, welcher weder gleich einem Gliede der Reihe (1.) noch einem Gliede der Reihe (2.) mit einer Constanten multiplicirt, die Existenz einer von (1.) und (2.) verschiedenen Reihe:

$$F_2(\eta),\ F_2(\eta J),\ \ldots,\ F_2(\eta J^{\lambda-1}) \tag{3.}$$

von Gliedern desselben reducirten Wurzelsystems oder λ neue Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$ sich ergeben.

Durch Fortsetzung dieses Schlusses gelangt man zu dem Satze:

I. Ist $N > 2$ und kein Factor der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ der Primform $\Phi(y_1, y_2)$ N^{ten} Grades von der Gestalt $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$, so ist $\Psi(y_1, y_2)$ ein Product von Factoren der Form: [121

$$P_i = F_i(\eta) F_i(\eta J) \ldots F_i(\eta J^{\lambda-1}), \tag{4.}$$

wo $\lambda = L$ oder $\frac{L}{2}$, je nachdem L ungerade oder gerade ist.

Da die Anzahl der Factoren von $\Psi(y_1, y_2)$ gleich $2N-4$, so ergiebt sich aus diesem Satze:

II. Es ist λ ein Divisor von $2N-4$.

Setzt man also

$$\frac{2N-4}{\lambda} = \lambda', \tag{5.}$$

so ist

$$\Psi(y_1, y_2) = CP_1 P_2 \ldots P_{\lambda'}, \tag{6.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

16.

Unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer sei:

1) $L = 2$. Aus Gleichung (1.) No. 14 folgt alsdann

$$N = \frac{2L'}{L'-1} = 2 + \frac{2}{L'-1}, \tag{1.}$$

d. h.

(2.) $$L' = 2, \quad N = 4$$

oder

(3.) $$L' = 3, \quad N = 3.$$

2) $L > 2$. In diesem Falle bilden nach No. 7, I.

$$\eta_1 \text{ und } \eta^{L-1}\psi(\eta_1^L)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.). Setzen wir demnach

(4.) $$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_1^{L-1}\psi(\eta^L).$$

Wir haben alsdann

(5.) $$F_i(\eta) = \alpha_i y_2 + \beta_i y_2,$$

wo α_i, β_i Constanten bedeuten. Ferner ist

(6.) $$F_i(\eta J^\varkappa) = \alpha_i J^\varkappa y_1 + \beta_i J^{-\varkappa} y_2.$$

Demnach ist

(7.) $$P_i = J^{-\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}[\beta_i^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_i^\lambda y_1^\lambda].$$

Es ergiebt sich also aus Gleichung (6.) vor. Nummer:

122] Ist $N > 2$, $L > 2$, und kein Factor der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ der Primform $\Phi(y_1, y_2)$ N^{ten} Grades der Gestalt $\beta\eta^{L-1}\psi(\eta^L)$, oder gleich η multiplicirt mit einer Constanten, so hat $\Psi(y_1, y_2)$ die Form:

(8.) $$\Psi(y_1, y_2) = C(\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_1^\lambda y_1^\lambda)(\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_2^\lambda y_1^\lambda)\ldots(\beta_k^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1}\alpha_k^\lambda y_1^\lambda),$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Covariante enthält also y_1 und y_2 nur in solchen Potenzen, deren Exponenten Vielfache von λ sind.

17.

Die Hessesche Covariante der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ Gleichung (8.) vor. Nummer hat die Gestalt:

(1.) $$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2}\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind.

Da die Hessesche Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ nach No. 12 Wurzel einer rationalen Function ist, so ist nach Satz III. No. 5 auch die Hessesche Covariante der Hesseschen Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function. Da $\Psi_1(y_1, y_2)$ den Factor y_1 $\lambda-2$ mal enthält, so enthält dieselbe Form nach Satz VI. No. 10 sämmtliche mit y_1 zu einem reducirten Wurzelsystem zu vereinigenden Integrale als Linearfactoren und zwar jedes mindestens zur $\lambda-2^{\text{ten}}$ Potenz. Da die Anzahl der Glieder dieses Wurzelsystems mindestens gleich N ist, so ist $\Psi_1(y_1, y_2)$ demnach durch eine Form vom mindestens $(\lambda-2)N^{\text{ten}}$ Grade theilbar. Nun ist $\Psi_1(y_1, y_2)$ vom Grade $4N-12$. Es muss also:

$$4N-12 \geqq (\lambda-2)N \tag{2.}$$

oder

$$(6-\lambda)N \geqq 12 \tag{2a.}$$

sein. Aus dieser Ungleichung folgt:

I. Die Zahl λ ist kleiner als 6.

Aus Gleichung (1.) No. 14 folgt:

$$N = 2 + \frac{2L}{2L'-L}. \tag{3.}$$

Aus No. 14, ferner dem Satze II. No. 15, dem Satze I. dieser Nummer und der Gleichung (3.) ergiebt sich, dass für $N>2$, $L>2$ die folgende Tabelle die allein zulässigen Werthcombinationen von N, L, L' sämmtlich enthält:

(4.)
$$\begin{cases} L=3,\ \lambda=3:\ L'=2,\ N=8 \text{ oder } L'=3,\ N=4, & [123 \\ L=4,\ \lambda=2:\ L'=3,\ N=6 \text{ oder } L'=4,\ N=4 \text{ oder } L'=6,\ N=3, \\ L=5,\ \lambda=5:\ L'=3,\ N=12 \text{ oder } L'=5,\ N=4, \\ L=6,\ \lambda=3:\ L'=4,\ N=8 \text{ oder } L'=5,\ N=5 \text{ oder } L'=6,\ N=4, \\ L=8,\ \lambda=4:\ L'=5,\ N=10 \text{ oder } L'=6,\ N=6 \text{ oder } L'=8,\ N=4, \\ L=10,\ \lambda=5:\ L'=6,\ N=12 \text{ oder } L'=7,\ N=7. \end{cases}$$

Aus No. 14, den Gleichungen (2.) und (3.) in No. 16, dem Satze I. in No. 11 und aus der eben aufgestellten Tabelle (4.) dieser Nummer ergiebt sich der Satz:

II. Der niedrigste Grad N einer aus einem beliebigen Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_1, y_2 gebildeten Form $f(y_1, y_2)$, welche gleich einer Wurzel einer rationalen Function von z, ist niemals grösser als 12.

18.

Es sei wieder η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades, und es werde $L > 2$ vorausgesetzt. Es giebt alsdann nach No. 7, I. ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) von der Form

$$y_1 = \eta, \quad y_2 = \eta^{L-1}\psi(\eta^L). \tag{1.}$$

Stellen wir die Primform N^{ten} Grades durch dasselbe dar, so haben wir

$$\Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^N + a_1 y_1^{N-1} y_2 + \cdots + a_N y_2^N.$$

Diese Form hat die Eigenschaft:

$$\Phi(y_1 J, y_2 J^{-1}) = \varepsilon \Phi(y_1, y_2), \tag{2.}$$

wo ε eine Constante bedeutet.

Da die Gleichung (2.) identisch erfüllt werden muss, so ergiebt sich, dass

$$\varepsilon = J^{N-2k}, \tag{3.}$$

wo k eine der Zahlen $0, 1, \ldots, N$ bedeutet, und dass

$$a_i = 0, \text{ wenn nicht } 2i \equiv 2k, \text{ mod. } L, \text{ d. h. } i \equiv k, \text{ mod. } \lambda. \tag{4.}$$

Da aber $\Phi(y_1, y_2)$ als Primform keinen quadratischen Factor enthält, so dürfen nicht gleichzeitig

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 = 0$$

[124]

und nicht gleichzeitig

$$a_{N-1} = 0 \quad \text{und} \quad a_N = 0$$

sein. Da aber der Voraussetzung nach y_1 ein Divisor der Form $\Phi(y_1, y_2)$ ist, so hat man

$$a_N = 0. \tag{5.}$$

Demnach ist entweder

$$\left.\begin{array}{ll} (6.) & 2k \equiv 0 \text{ und } 2k \equiv 2(N-1) \\ \text{oder} & \\ (6a.) & 2k \equiv 2 \text{ und } 2k \equiv 2(N-1) \end{array}\right\} \text{mod. } L.$$

Im Falle (6.) wäre

$$2(N-1) \equiv 0, \text{ mod. } L,$$

d. h.

$$(7.) \qquad N-1 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Finden nun 1) die Voraussetzungen der No. 14 statt, so ist

$$N = 4,$$

also, da $L > 2$, nach Congruenz (7.),

$$\lambda = 3.$$

Es ergiebt sich also

$$(8.) \qquad N = 4, \quad L = 3 \quad \text{oder} \quad L = 6.$$

Finden 2) die Voraussetzungen der No. 15 statt, so folgt aus der Congruenz (7.)

$$(9.) \qquad 2N-2 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Unter denselben Voraussetzungen ist aber nach dem Satze II. in No. 15

$$(10.) \qquad 2N-4 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Aus den Congruenzen (9.) und (10.) ergiebt sich:

$$2 \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

d. h.

$$(11.) \qquad \lambda = 2, \quad L = 4.$$

Die möglichen Gestalten der Primformen niedrigsten Grades, für $N > 2$, $L > 2$ sind danach in folgender Tabelle enthalten:

125]

(12.)

$$
\left\{\begin{array}{ll}
(\alpha) & N = 3, \quad L = 4, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^3 + a_3 y_1 y_2^2, \\
(\beta) & N = 4, \quad L = 3 \text{ oder } 6, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^4 + a_3 y_1 y_2^3, \\
& N = 4, \quad L = 4, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^3 y_2 + a_3 y_1 y_2^3, \\
(\gamma) & N = 5, \quad L = 6, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^4 y_2 + a_4 y_1 y_2^4, \\
(\delta) & N = 6, \quad L = 4, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^5 y_2 + a_3 y_1^3 y_2^3 + a_5 y_1 y_2^5, \\
& N = 6, \quad L = 8, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5, \\
(\varepsilon) & N = 7, \quad L = 10, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^6 y_2 + a_6 y_1 y_2^6, \\
(\zeta) & N = 8, \quad L = 3 \text{ oder } 6, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^7 y_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_7 y_1 y_2^7, \\
(\eta) & N = 10, \quad L = 8, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^9 y_2 + a_5 y_1^5 y_2^5 + a_9 y_1 y_2^9, \\
(\vartheta) & N = 12, \quad L = 5 \text{ oder } 10, \\
& \Phi(y_1, y_2) = a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11}.
\end{array}\right.
$$

19.

Die Tabelle (12.) der vorigen Nummer gestattet noch einige Reductionen.

In der That ist die Hessesche Covariante einer kubischen Form eine quadratische Form. Es kann demnach N nicht den Werth 3 haben (siehe auch No. 12). Deshalb ist in obiger Tabelle die Form (α) auszuschliessen.

Die Hessesche Covariante der Form (β) für $N = 4$, $L = 4$ obiger Tabelle ist

$$-3^2(a_1 y_1^2 - a_3 y_2^2)^2.$$

Es ist daher nach Satz III. No. 5 schon $a_1 y_1^2 - a_3 y_2^2$ Wurzel einer rationalen Function, also $N < 4$. Demnach ist die Form (β) für $N = 4$, $L = 4$ auszuschliessen.

Ist $f(y_1, y_2)$ eine beliebige binäre Form, so ist bekanntlich [126

$$(1.)\quad \frac{\partial^r f}{\partial y_1^r}\frac{\partial^r f}{\partial y_2^r} - r\frac{\partial^r f}{\partial y_1^{r-1}\partial y_2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_2^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1^{r-2}\partial y_1^2}\frac{\partial^r f}{\partial y_1^2 \partial y_2^{r-2}} - \text{etc.}$$

eine Covariante von $f(y_1, y_2)$.

Danach ist für $r = 4$ eine Covariante der Form (γ)

$$(1a.)\qquad -(1.2.3.4)^2.2.3\, a_1 a_4 y_1 y_2.$$

Da nun weder a_1 noch a_4 verschwinden dürfen, weil $\Phi(y_1, y_2)$ als Primform nicht durch einen quadratischen Factor theilbar ist, so ist demnach (1a.) eine Form zweiten Grades, welche nach Satz III. No. 5 Wurzel einer rationalen Function ist. Es wäre also $N < 5$, und deshalb Form (γ) auszuschliessen.

Ebenso ist für $r = 6$ eine nach (1.) gebildete Covariante der Form (ε):

$$(1b.)\qquad -2.5.(1.2.3.4.5.6)^2 a_1 a_6 y_1 y_2.$$

Es ist also aus denselben Gründen Form (ε) auszuschliessen. Es verbleibt demnach folgende Tabelle:

(2.)

$N > 2, \quad L > 2,$

N	L	$\Phi(y_1, y_2)$
4	3 oder 6	$a_0 y_1^4 + a_4 y_1 y_2^3$
6	4	$a_1 y_1^5 y_2 + a_3 y_1^3 y_2^3 + a_5 y_1 y_2^5$
6	8	$a_1 y_1^5 y_2 + a_5 y_1 y_2^5$
8	3 oder 6	$a_1 y_1^7 y_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_7 y_1 y_2^7$
10	8	$a_1 y_1^9 y_2 + a_5 y_1^5 y_2^5 + a_9 y_1 y_2^9$
12	5 oder 10	$a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11}$

Nach Gleichung (2.) No. 16 muss noch der Fall $N = 4$, $L = 2$ berücksichtigt werden ($N = 3$ Gleichung (3.) daselbst ist aus dem im Anfange dieser Nummer angegebenen Grunde auszuschliessen). In diesem Falle hat nach No. 7, I. jedes Integral die Form

$$y\psi(y^2).$$

Nach No. 14 ist auch der Fall $N = 4$, $L = 1$ in Betracht zu ziehen.

Hieraus folgt, dass zur Tabelle (2.) noch die aus einem beliebigen Fundamentalsystem η_1, η_2 gebildete Form vierten Grades hinzugefügt

werden muss, nämlich

$$(3.)\qquad \begin{cases} N = 4, \quad L = 1 \text{ oder } 2, \\ \Phi(\eta_1, \eta_2) = a_0\eta_1^4 + a_1\eta_1^3\eta_2 + a_2\eta_1^2\eta_2^2 + a_3\eta_1\eta_2^3 + a_4\eta_2^4. \end{cases}$$

127] 20.

Aus der vorigen Nummer und No. 2 ergiebt sich der Satz:

I. Wenn die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral besitzt, so ist entweder dieses selber, d. h. eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen y_1, y_2 gebildete Form ersten Grades, oder eine aus denselben Integralen gebildete Form, deren Grad eine der Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12 ist, Wurzel einer rationalen Function.

II. Ist umgekehrt eine aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form, höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades, Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral.

Es sei nämlich die Form:

$$(1.)\qquad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^n + a_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + a_n y_2^n = \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ die Wurzel einer rationalen Function bedeutet. Ist $\Phi(y_1, y_2)$ die Potenz einer Form niedrigeren Grades $\Psi(y_1, y_2)$, so ergiebt sich, dass auch die letztere Form gleich der Wurzel einer rationalen Function ist. Dieselbe ist der Voraussetzung nach entweder vom ersten Grade — in welchem Falle die Differentialgleichung (B.) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird — oder höheren als zweiten Grades. Im zweiten Falle sei also:

$$(2.)\qquad \Psi(y_1, y_2) = b_0 y_1^k + b_1 y_1^{k-1} y_2 + \cdots + b_k y_2^k = X(z),$$

wo $k > 2$, und wo der Voraussetzung nach, wenn

$$(2a.)\qquad \Psi(y_1, y_2) = (c_{11}y_1 + c_{12}y_2)^{\alpha_1}(c_{21}y_1 + c_{22}y_2)^{\alpha_2}(c_{31}y_1 + c_{32}y_2)^{\alpha_3}\cdots,$$

die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen.

Wir setzen wie in No. 13

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_2}{y_1} = u, \qquad b_0 + b_1 u + \cdots + b_k u^k = f(u), \\ \dfrac{d\log f(u)}{du} = f_1(u), \qquad \dfrac{d\log X(z)}{dz} = X_1(z). \end{cases}$$

Alsdann geht die Gleichung (2.) über in:

$$f(u) = \frac{X(z)}{y_1^k}. \tag{4.}$$

Die logarithmische Differentiation dieser Gleichung unter Benutzung der Gleichung (1.) No. 6 ergiebt:

$$-Cf_1(u) = y_1^3 X_1(z) - k y_1 \frac{dy_1}{dz}. \tag{5.}$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt unter abermaliger Anwendung [128 der Gleichung (1.) No. 6 und Berücksichtigung der Differentialgleichung (B.):

$$C^2 \frac{df_1(u)}{du} = 2y_1^3 \frac{dy_1}{dz} X_1(z) + Q y_1^4 - k y_1^2 \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2, \tag{6.}$$

wo

$$Q = \frac{dX_1(z)}{dz} - kP. \tag{7.}$$

Die Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus den Gleichungen (5.) und (6.) ergiebt:

$$C^2\left[k\frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] = [X_1(z)^2 + kQ]\, y_1^4. \tag{8.}$$

Substituirt man hierin für y_1 seinen Werth aus Gleichung (4.), so folgt:

$$C^2\left[k\frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] f(u)^{\frac{4}{k}} = [X_1(z)^2 + kQ]\, X(z)^{\frac{4}{k}}. \tag{9.}$$

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass diese Gleichung in Bezug auf u nicht identisch erfüllt ist.

Dieselbe wäre nur dann identisch in Bezug auf u erfüllbar, wenn die linke Seite von u unabhängig wäre. Nun ist zunächst der Voraussetzung nach $f(u)$ nicht identisch Null, und es kann auch nicht identisch

$$k\frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2 = 0$$

sein. Denn hieraus ergäbe sich

$$f(u) = K(u-\mu)^k,$$

wo K und μ Constanten sind, oder was dasselbe ist:

$$\Psi(y_1, y_2) = K(y_2 - \mu y_1)^k.$$

Dieses widerspräche aber der Voraussetzung. Es könnte also nur noch

$$R = f(u)^{\frac{4}{k}}\left[k\frac{df_1(u)}{du} + f_1(u)^2\right] = \nu$$

sein, wo ν eine von u unabhängige und von Null verschiedene Grösse wäre. Da der zweite Factor von R eine rationale Function von u ist, so müsste auch

$$f(u)^{\frac{4}{k}} = g(u)$$

eine rationale Function von u sein. Hieraus ergäbe sich aber

$$f(u)^4 = g(u)^k$$

oder

$$(c_{11} + c_{12}u)^{4\alpha_1}(c_{21} + c_{22}u)^{4\alpha_2}(c_{31} + c_{32}u)^{4\alpha_3}\cdots = g(u)^k.$$

129] Es müssten also die Exponenten $4\alpha_1, 4\alpha_2, 4\alpha_3, \ldots$ den gemeinschaftlichen Theiler k haben. Da aber der Voraussetzung nach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so müsste k ein Theiler von 4 sein, also, da $k > 2$,

$$k = 4$$

sein.

In diesem Falle ist also:

$$R = 4\frac{d^2f(u)}{du^2} - \frac{3}{f(u)}\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2.$$

Da aber der Voraussetzung nach $f(u)$ mindestens zwei ungleiche Linearfactoren hat, so ist $\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2$ nicht durch $f(u)$ theilbar, deshalb kann R sich nicht identisch auf eine Constante reduciren.

Es ergiebt sich daher aus der Gleichung (9.) u als algebraische Function von z. Alsdann aber liefert auch die Gleichung (4.) y_1 als algebraische Function von z, wodurch unser Satz bewiesen ist.

21.

Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.), so genügt

(1.) $$v = y^\mu$$

einer linearen Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(C.) \qquad \frac{d^{\mu+1}v}{dz^{\mu+1}} + P_{\mu-1}\frac{d^{\mu-1}v}{dz^{\mu-1}} + P_{\mu-2}\frac{d^{\mu-2}v}{dz^{\mu-2}} + \cdots + P_0 v = 0,$$

(vergl. die Abhandlung des Herrn LIOUVILLE, dessen Journal t. IV, p. 430).

Dieselbe wird erhalten, wenn man in der Gleichung:

$$(2.) \qquad \frac{dv_{i+1}}{dz} = (i+1)(\mu-i)Pv_i + v_{i+2}$$

$i = 0, 1, \ldots, \mu-1$ setzt, $v_0 = v$, $v_{\mu+1} = 0$ annimmt und aus diesen μ Gleichungen durch successive Differentiation und Elimination $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ herausschafft.

I. Der Differentialgleichung (C.) genügt auch jede aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form μ^{ten} Grades.

In der That, da derselben der Ausdruck

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)^\mu$$

für beliebige Werthe der Constanten c_1, c_2 genügt, so ist auch

$$(3.) \qquad \sum_0^\mu{}_i \lambda_i (c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2)^\mu, \qquad [130$$

wo die λ_i ebenfalls Constanten bedeuten, ein Integral der Differentialgleichung (C.). Setzt man nun

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2\ldots k} = \mu_k$$

und

$$(4.) \qquad \mu_k \sum_0^\mu{}_i \lambda_i c_{i1}^{\mu-k} c_{i2}^k = a_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, \mu)$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_\mu$ beliebig gegebene Grössen sind, so ist die Determinante des Systems linearer Gleichungen (4.) für die Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ wegen der Willkürlichkeit der Grössen c_{i2}, c_{i2} von Null verschieden, woraus sich ergiebt, dass das Integral (3.) der Differentialgleichung (C.) gleich einer beliebigen Form

$$a_0 y_1^\mu + a_1 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + a_\mu y_2^\mu$$

gemacht werden kann.

In der oben angeführten Abhandlung des Herrn LIOUVILLE bemerkt derselbe pag. 431 in einer Note gelegentlich, dass

$$A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + A_{\mu+1} y_2^\mu,$$

wo y_1, y_2 zwei verschiedene Integrale der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dz^2} = Py$,

$A_1, A_2, \ldots, A_{\mu+1}$ willkürliche Constanten bedeuten, das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung $(\mu+1)^{ter}$ Ordnung sei, welcher y^μ genügt. Den Beweis theilt er nicht mit, da diese Bemerkung für die Frage, welche dort verhandelt wird, nicht von Belang sei. Wie man sieht, stimmt der Sache nach diese Bemerkung mit unserem Satze I. dieser Nummer überein.

Es lässt sich übrigens auch direct durch Differentiation in analoger Weise wie für $v = y^\mu$, für $v = y_1^{\mu-k} y_2^k$ zeigen, dass die lineare Differentialgleichung, welcher dasselbe genügt, durch Elimination aus dem System (2.) erhalten wird. Aus der Homogeneität der Differentialgleichung (C.) ergiebt sich alsdann, dass eine beliebige aus y_1, y_2 gebildete Form ein Integral derselben ist.

II. Die Integrale

$$(5.) \qquad y_1^\mu,\ y_1^{\mu-1} y_2,\ \ldots,\ y_2^\mu$$

der Differentialgleichung (C.) bilden ein Fundamentalsystem.

Denn wenn die Gleichung

$$a_0 y_1^\mu + a_1 y_1^{\mu-1} y_2 + \cdots + a_\mu y_2^\mu = 0$$

131] bestehen könnte, ohne dass die constanten Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_\mu$ sämmtlich Null wären, so ergäbe sich aus derselben ein für jedes z constanter Werth des Verhältnisses $\frac{y_2}{y_1}$, was der Voraussetzung widerspricht, dass y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) bilden.

Aus der Bildungsweise der Differentialgleichung (C.) ergiebt sich:

III. Die Differentialgleichung (C.) hat keine anderen singulären Punkte als die der Differentialgleichung (B.).

IV. Sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch, so sind auch die Integrale der Differentialgleichung (C.) sämmtlich algebraisch.

Sind nämlich die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch, so gilt dasselbe für das Fundamentalsystem (5.) der Integrale der Differentialgleichung (C.), folglich für jedes Integral derselben.

22.

Aus den Sätzen I. und II. No. 20 und aus No. 13 ergiebt sich, wenn man noch erwägt, dass die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 1$ mit der Differentialgleichung (B.) coincidirt, der folgende Satz:

Die nothwendige Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt, ist die, dass die Differentialgleichung (C.) für eine der Zahlen $\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werde.

Erfolgt dieses für $\mu = 1$, oder erst für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ, der grösser ist als 2, so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale.

Erfolgt dieses aber zuerst für $\mu = 2$, und ist $\varphi(z)$ ein Integral der Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$, welches gleich einer Wurzel einer rationalen Function, so ist $\varphi(z)^2$ eine rationale Function von z, und

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Grösse λ. Ist nun $\lambda\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch.

Durch diesen Satz ist die Untersuchung der Frage, wie die Differentialgleichung (B.) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, [132 bis auf die Untersuchung von $\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ für den Fall $\mu = 2$, nach No. 3 auf die elementare Aufgabe zurückgeführt worden, zu ermitteln, unter welchen Umständen ein System linearer Gleichungen Lösungen zulässt oder nicht zulässt.

In der That wird man ein für allemal für $\mu = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die Differentialgleichung (C.) aufstellen können, und in jedem gegebenen Falle die Untersuchung anzustellen haben, unter welchen Umständen eine dieser Differentialgleichungen durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine Untersuchung, welche nach No. 3 auf die Frage der Lösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen zurückgeführt wird.

23.

Wir wollen nunmehr zeigen, dass man die allgemeine Aufstellung der Differentialgleichung (C.) für die angegebenen Werthe von μ auch entbehren kann.

Soll nämlich die Differentialgleichung (C.) für $\mu > 2$ durch eine Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden, so sind nach dem Satze der

vorigen Nummer die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.), folglich auch nach dem Satze IV. No. 21 die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (C.) algebraisch. Diese gehört demnach zur Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66[1])) (vergl. diese Arbeit No. 4), und hat nach Satz III. No. 21 die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$.

Es seien jetzt r_i und $1-r_i$ die beiden Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) (s. No. 4), y_1, y_2 das Fundamentalsystem, zu welchem diese Wurzeln als Exponenten resp. gehören, so gehören die nach Satz II. No. 21 ein Fundamentalsystem bildenden Integrale $y_1^\mu, y_1^{\mu-1}y_2, \ldots, y_2^\mu$ der Differentialgleichung (C.) resp. zu den Exponenten:

$$(1.) \qquad \mu r_i, \quad (\mu-2)r_i+1, \quad (\mu-4)r_i+2, \quad \ldots, \quad (\mu-2\mu)r_i+\mu,$$

welche demnach auch die $\mu+1$ Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C.) sind.

Sind ferner σ und $-\sigma-1$ die beiden Wurzeln der zu $z=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) (s. No. 4), so ergiebt sich ebenso, dass die zu $z=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (C.) die Wurzeln

$$(2.) \qquad \mu\sigma, \quad (\mu-2)\sigma-1, \quad (\mu-4)\sigma-2, \quad \ldots, \quad (\mu-2\mu)\sigma-\mu$$

hat. Ist ein Integral v der Differentialgleichung (C.) Wurzel einer rationalen Function, so hat dasselbe die Form:

$$(3.) \qquad v = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho}g(z) \qquad \text{(s. No. 3)},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen und $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeuten.

Aus meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66[1]), No. 5) ergiebt sich, dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ Zahlenwerthe aus der Reihe (1.) sind.

Ist ferner ν der Grad von $g(z)$, so ist nach derselben Arbeit

$$-(\nu+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\varrho)$$

mit einer der Grössen (2.) identisch.

---

[1]) Abh. VI, Bd. I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Man hat also nachzusehen, für welche ganzzahligen Werthe von $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ und α die Summe

$$(4.) \quad -[(\mu-2k_1)r_1+k_1+(\mu-2k_2)r_2+k_2+\cdots+(\mu-2k_\varrho)r_\varrho+k_\varrho+(\mu-2\alpha)\sigma-\alpha],$$

wo μ einen der Zahlenwerthe 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 darstellt, eine ganze positive Zahl ν wird, und dann

$$(5.) \quad \alpha_1=(\mu-2k_1)r_1+k_1, \quad \alpha_2=(\mu-2k_2)r_2+k_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\varrho=(\mu-2k_\varrho)r_\varrho+k_\varrho$$

und den Grad von $g(z)$ gleich ν zu wählen, und mit diesen Werthen zu untersuchen, ob v in (3.) der Differentialgleichung (C.) genügt.

Diese Untersuchung lässt sich nun folgendermassen ausführen:

Es sei μ eine der Zahlen 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, und es werde das Gleichungssystem (2.) No. 21 gebildet:

$$(6.) \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dz} = v_1, \\ \dfrac{dv_1}{dz} = \mu P v + v_2, \\ \dfrac{dv_2}{dz} = 2(\mu-1)Pv_1+v_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dv_\mu}{dz} = \mu P v_{\mu-1}. \end{cases}$$

Ist nunmehr

$$(7.) \quad g(z) = g_0+g_1z+g_2z^2+\cdots+g_\nu z^\nu,$$

und substituiren wir in die erste der Gleichungen (6.) den Werth v aus Gleichung (3.), so liefert dieselbe v_1. Setzen wir diesen Werth für v_1 [134 und v aus Gleichung (3.) in die zweite der Gleichungen (6.), so erhalten wir v_2 u. s. w. Die letzte der Gleichungen (6.) muss identisch befriedigt werden. Man erhält also aus dieser zuletzt ein System linearer Gleichungen für die Coefficienten $g_0, g_1, \ldots, g_\nu$. Je nachdem dasselbe für irgend eine der Zahlen $\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ und irgend eines der oben bestimmten Werthsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$, ν endliche Lösungen besitzt oder nicht, wird die Differentialgleichung (C.) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt oder nicht.

24.

Wir schliessen dem Vorstehenden einige Sätze an, aus welchen sich in vielen Fällen auch ohne die nach voriger Nummer zu veranstaltende Rechnung beurtheilen lässt, ob die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt.

Es sei r eine Wurzel der zum singulären Punkte a oder zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.), wo a einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ bedeutet, und es werde vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch sind, so ist r eine rationale Zahl (s. No. 4). Bezeichnen wir mit y das Glied des zu a gehörigen Fundamentalsystems von Integralen derselben Differentialgleichung, welches dem Exponenten r entspricht, und setzen:

$$r = \frac{\delta}{\mathfrak{n}}, \tag{1.}$$

wo δ und $\mathfrak{n}$ zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten.

Nach einem Umlaufe von z um a geht y in yj^δ über, wo j eine primitive Wurzel der Gleichung

$$j^{\mathfrak{n}} = 1 \tag{2.}$$

ist. Nach No. 1 ist $\mathfrak{n}$ ein Theiler des Grades m der irreductiblen Gleichung, welcher y genügt.

Die Anzahl ν der Glieder des reducirten Wurzelsystems derselben Gleichung kann nicht kleiner als N sein (s. Satz I. No. 11).

Nach No. 1 und No. 9 ist aber

$$\nu \leqq \frac{m}{\mathfrak{n}}, \tag{3.}$$

d. h. nach No. 11

$$\nu \leqq \frac{NL}{\mathfrak{n}}. \tag{4.}$$

135] Hieraus ergiebt sich, dass

$$\mathfrak{n} \leqq L. \tag{5.}$$

Ist demnach

$$N > 2, \tag{6.}$$

so folgt aus der Tabelle (2.) No. 19 und Gleichung (3.) derselben Nummer

(7.) $$n \leqq 10.$$

Wir erhalten also den Satz:

Ist irgend ein Nenner der auf ihre kleinste Benennung gebrachten rationalen Zahlen, welche die zu den singulären Punkten und zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (B.) befriedigen, grösser als 10, so besitzt dieselbe Differentialgleichung kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird.

25.

Wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen der No. 13

(1.) $$y_1 y_2 = \psi(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist a irgend ein singulärer Punkt der Differentialgleichung (B.), r und $1-r$ die Wurzeln der zu demselben gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ist in der Umgebung von a:

(2.) $$\begin{cases} y_1 = c_{11} X_1 (z-a)^r + c_{12} X_2 (z-a)^{1-r}, \\ y_2 = c_{21} X_1 (z-a)^r + c_{22} X_2 (z-a)^{1-r}, \end{cases}$$

wo X_1 und X_2 nach positiven ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihen sind, die für $z = a$ nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt:

(3.) $$y_1 y_2 = c_{11} c_{21} X_1^2 (z-a)^{2r} + (c_{11} c_{22} + c_{21} c_{12}) X_1 X_2 (z-a) + c_{12} c_{22} X_2^2 (z-a)^{2(1-r)} = \psi(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist $\psi(z)$ für $z = a$ von der μ^{ten} Ordnung Null oder von der Ordnung $-\mu$ unendlich, und hat r einen von den Zahlen 1, 2, 4 verschiedenen Nenner, so ergiebt sich aus dieser Gleichung [136

$$c_{11} = 0, \quad c_{22} = 0 \quad \text{oder} \quad c_{12} = 0, \quad c_{21} = 0$$

und $-\frac{\mu}{2} = 1$ oder

(4.) $$\mu = -2,$$

d. h. $\psi(z)$ kann in einem singulären Punkte nur unendlich werden, und zwar zweiter Ordnung. Nach Gleichung (1.) wäre aber jeder Punkt, in welchem $\psi(z)$ verschwindet, ein singulärer, es kann deshalb $\psi(z)$ überhaupt für keinen endlichen Werth von z verschwinden. Wird aber $\psi(z)$ in einem nicht singulären Punkte b unendlich, so folgt aus Gleichung (1.), dass $\psi(z)$ den Factor $z-b$ eine gerade Anzahl mal enthält. Es ist demnach

$$\psi(z) = \frac{1}{g(z)^2}, \tag{5.}$$

wo $g(z)$ eine ganze rationale Function von z ist.

Je nachdem also $\int \frac{dz}{g(z)}$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function ist oder nicht, sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) Wurzeln rationaler Functionen oder überhaupt nicht algebraisch.

Man hat also den Satz:

Wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, und sind die sämmtlichen Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, so wird die Differentialgleichung (B.) entweder überhaupt durch kein algebraisches Integral oder durch die Wurzeln rationaler Functionen befriedigt.

In einer Abhandlung dieses Journal Bd. 75, S. 292 ff.[1]) hat Herr Schwarz unter Anwendung von Abbildungsproblemen die Bedingungen aufgestellt, unter welchen die Differentialgleichung der Gaussschen Reihe algebraische Integrale besitzt. Da diese Differentialgleichung einen besonderen Fall der Differentialgleichung (A.) bildet, wenn nämlich die Anzahl der singulären Punkte gleich zwei, so liessen sich die Resultate des Herrn Schwarz aus den oben entwickelten Principien für den besonderen Fall $\varrho = 2$ herleiten. Wir heben hier nur hervor, dass aus der vorhergehenden und dieser Nummer sich der wahre Grund dafür ergiebt, dass in der Tabelle derselben Abhandlung S. 323[2]), wenn nicht von den drei Zahlen λ'', μ'', ν'' zwei den Nenner 2 haben, die Nenner die Zahl 5 nicht übersteigen dürfen.

---

[1]) H. A. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II (1890), S. 211 ff. Sch.

[2]) ebenda S. 246. Sch.

26. [137

Es seien wieder die rationalen Zahlen

$$\frac{\delta_i}{n_i} \quad \text{und} \quad 1-\frac{\delta_i}{n_i}$$

die Wurzeln der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B.) und y_{i1}, y_{i2} das zu demselben singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, welche resp. den Exponenten $\frac{\lambda_i}{n_i}$ und $1-\frac{\delta_i}{n_i}$ entsprechen. Ferner sei $\frac{\delta_i}{n_i}$ die in algebraischem Sinne grössere dieser beiden Zahlen, so dass $\frac{\delta_i}{n_i}$ positiv ist.

Alsdann ist nach meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66[1]) No. 5) in der Umgebung von a_i

$$y_{i1} = (z-a_i)^{\frac{\delta_i}{n_i}} \omega_{i1}, \tag{1.}$$

wo ω_{i1} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet, welche für $z=a_i$ nicht verschwindet.

Nach No. 6 Gleichung (1.) ist

$$y_{i2} = C_i y_{i1} \int \frac{dz}{(z-a_i)^{\frac{2\delta_i}{n_i}} \omega_{i1}^2}, \tag{2.}$$

wo C_i eine Constante bedeutet.

Ist nun $n_i = 2$ und der Coefficient γ_i von $(z-a_i)^{\delta_i - 1}$ in der Reihe für $\frac{1}{\omega_{i1}^2}$ gleich Null, so tritt in der Entwickelung von y_{i2} kein Logarithmus auf, und man hat in der Umgebung von a_i ebenfalls

$$y_{i2} = (z-a_i)^{1-\frac{\delta_i}{n_i}} \omega_{i2}, \tag{3.}$$

wo ω_{i2} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $z=a_i$ nicht verschwindet.

Wir setzen jetzt voraus, dass für alle singulären Punkte

$$n_i = 2, \quad \gamma_i = 0 \tag{4.}$$

sei. Es bleiben alsdann y_{i1}^2, $y_{i1}y_{i2}$, y_{i2}^2 nach einem Umlaufe von z um a_i ungeändert.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

138] Ist k eine von i verschiedene Zahl der Reihe $1, 2, \ldots, \varrho$, so ist

$$(5.) \qquad \begin{cases} y_{i1} = c_{11} y_{k1} + c_{12} y_{k2}, \\ y_{i2} = c_{21} y_{k1} + c_{22} y_{k2}. \end{cases}$$

Es ist demnach y_{i1}^2 von der Form:

$$(6.) \qquad y_{i1}^2 = A_0 y_{k1}^2 + A_1 y_{k1} y_{k2} + A_2 y_{k2}^2.$$

Nach einem Umlauf von z um a_k bleibt daher y_{i1}^2 ebenfalls ungeändert. Da aber y_{i1} als Integral einer Differentialgleichung von der Form (12.) meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66, No. 4[1])) überall von endlicher Ordnung unendlich wird, so ist y_{i1} die Quadratwurzel einer rationalen Function.

Wir erhalten also den Satz:

Ist für alle singulären Punkte $\mathfrak{n}_i = 2$, $\gamma_i = 0$, so wird die Differentialgleichung (B.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt.

27.

Wir wollen zum Beschluss noch ein Verfahren angeben, vermöge dessen die Betrachtung der Differentialgleichung (C.) entbehrlich gemacht und durch die directe Untersuchung der aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildeten Formen ersetzt wird.

Es sei y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.),

$$(1.) \qquad \Phi(y_1, y_2) = a_0 y_1^N + a_1 y_1^{N-1} y_2 + \cdots + a_N y_2^N$$

eine Primform niedrigsten Grades, wo also nach Satz I. No. 20 N eine der Zahlen $2, 4, 6, 8, 10, 12$ bedeutet.

Zum singulären Punkte a_i gehöre das Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_{i1}, y_{i2}, so ist bekanntlich

$$(2.) \qquad \begin{cases} y_1 = c_{11}^{(i)} y_{i1} + c_{12}^{(i)} y_{i2}, \\ y_2 = c_{21}^{(i)} y_{i1} + c_{22}^{(i)} y_{i2}. \end{cases}$$

Sind die Exponenten, zu welchen y_{i1}, y_{i2} resp. gehören, $\frac{\delta_i}{\mathfrak{n}_i}$ und $1 - \frac{\delta_i}{\mathfrak{n}_i}$, und bedeutet j_i eine primitive Wurzel der Gleichung

$$(3.) \qquad j_i^{\mathfrak{n}_i} = 1,$$

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186 ff. Sch.

so verwandeln sich y_1, y_2 nach einem Umlauf von z um a_i resp. in

$$(4.) \qquad \begin{cases} y_1' = b_{11}^{(i)} y_1 + b_{12}^{(i)} y_2, \\ y_2' = b_{21}^{(i)} y_1 + b_{22}^{(i)} y_2, \end{cases}$$

wo

$$(5.) \qquad \begin{cases} b_{11}^{(i)} = \dfrac{c_{11}^{(i)} c_{22}^{(i)} j_i^{\delta_i} - c_{12}^{(i)} c_{21}^{(i)} j_i^{-\delta_i}}{\Delta^{(i)}}, \\ b_{12}^{(i)} = \dfrac{-c_{11}^{(i)} c_{12}^{(i)} (j_i^{\delta_i} - j_i^{-\delta_i})}{\Delta^{(i)}}, \\ b_{21}^{(i)} = \dfrac{c_{21}^{(i)} c_{22}^{(i)} (j_i^{\delta_i} - j_i^{-\delta_i})}{\Delta^{(i)}}, \\ b_{22}^{(i)} = \dfrac{c_{11}^{(i)} c_{22}^{(i)} j_i^{-\delta_i} - c_{12}^{(i)} c_{21}^{(i)} j_i^{\delta_i}}{\Delta^{(i)}}, \\ \Delta^{(i)} = c_{11}^{(i)} c_{22}^{(i)} - c_{12}^{(i)} c_{21}^{(i)}. \end{cases}$$

[139.

Da $\Phi(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function sein soll, so muss die Substitution

$$(6.) \qquad S_i = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

diese Form in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten verwandeln, also

$$(7.) \qquad \Phi(b_{11}^{(i)} y_1 + b_{12}^{(i)} y_2,\ b_{21}^{(i)} y_1 + b_{22}^{(i)} y_2) = \varepsilon_i \Phi(y_1, y_2)$$

sein, wo ε_i eine Constante bedeutet.

Da diese Gleichung identisch erfüllt sein muss, so müssen die Coefficienten der Grössen $y_1^{N-k} y_2^k$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Man erhält so $N+1$ Gleichungen für jeden singulären Punkt, im ganzen demnach

$$(N+1)\varrho$$

Gleichungen, deren System wir mit (G.) bezeichnen wollen.

Es sei a_1 einer der singulären Punkte, und die Grössen $c_{11}^{(1)}, c_{12}^{(1)}, c_{21}^{(1)}, c_{22}^{(1)}$ beliebig gewählt, ferner sei

$$(8.) \qquad \begin{cases} y_{11} = \gamma_{11}^{(i)} y_{i1} + \gamma_{12}^{(i)} y_{i2}, \\ y_{12} = \gamma_{21}^{(i)} y_{i1} + \gamma_{22}^{(i)} y_{i2}, \end{cases} \qquad \text{für } i = 2, 3, \ldots, \varrho,$$

so ist

$$(9.)\qquad \begin{cases} c_{11}^{(i)} = c_{11}^{(1)}\gamma_{11}^{(i)} + c_{12}^{(1)}\gamma_{21}^{(i)}, & c_{21}^{(i)} = c_{21}^{(1)}\gamma_{11}^{(i)} + c_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(i)}, \\ c_{12}^{(i)} = c_{11}^{(1)}\gamma_{12}^{(i)} + c_{12}^{(1)}\gamma_{22}^{(i)}, & c_{22}^{(i)} = c_{21}^{(1)}\gamma_{12}^{(i)} + c_{22}^{(1)}\gamma_{22}^{(i)}. \end{cases}$$

In meiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 75, S. 208 ff.[1])) ist gelehrt worden, wie die Coefficienten der linearen homogenen Relationen, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme mit einander verbunden sind, aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten zu bestimmen sind. Danach ergeben 140] sich die Grössen $\gamma_{11}^{(i)}, \gamma_{12}^{(i)}, \gamma_{21}^{(i)}, \gamma_{22}^{(i)}$ als bekannte Functionen der in den Coefficienten der Differentialgleichung (B.) enthaltenen Constanten. Ihre Werthe sind z. B. für den Fall $\varrho = 2$ übereinstimmend mit den durch die Gaussschen II-Function ausgedrückten Coefficienten jener linearen homogenen Relationen, welche zwischen den zu je einem der beiden singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Differentialgleichung der Gaussschen Reihe bestehen (s. die Abhandlung des Herrn Kummer dieses Journal Bd. 15, S. 58, vergl. auch die im Nachlass enthaltene Arbeit von Gauss in dessen Werken, 3. Band).

Die Function P in der Differentialgleichung (B.) hat die Form:

$$(10.)\qquad P = \frac{f_{2\varrho-2}(z)}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2\ldots(z-a_\varrho)^2},$$

wo $f_{2\varrho-2}(z)$ eine ganze rationale Function von z vom $(2\varrho-2)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet. Dieselbe enthält also ausser den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$, die wir als gegeben annehmen, noch $2\varrho-1$ Constanten. Das System (G.) implicirt also als bestimmbare Grössen:

1) die Grössen $c_{11}^{(1)}, c_{12}^{(1)}, c_{21}^{(1)}, c_{22}^{(1)}$,

2) die Coefficienten von $f_{2\varrho-2}(z)$,

3) die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_N$ der Form (1.).

Das System (G.) ist nun für jedes N der Zahlenreihe 2, 4, 6, 8, 10, 12 aufzustellen. Alsdann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form Wurzel einer rationalen Function ist, die, dass wenigstens für eines dieser Systeme (G.), die Grössen 1), 2), 3) so bestimmt werden können,

[1]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 394 ff. Sch.

dass dasselbe befriedigt wird und sich ε_i als Einheitswurzel ergiebt. Denn die Form $\Phi(y_1, y_2)$, welche nach den Umläufen von z um je einen singulären Punkt sich nur mit je einer Einheitswurzel multiplicirt, ist Wurzel einer rationalen Function, da y_1, y_2 als Integrale der Differentialgleichung (B.) überall von endlicher Ordnung unendlich sind.

Es ist hiermit die Frage beantwortet, wie die Coefficienten von $f_{2\varrho-2}(z)$ beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitzt.

Wir haben oben dieselbe Frage unter Zuhülfenahme der Differentialgleichung (C.) gelöst, indem wir sie im Allgemeinen auf die Untersuchung zurückführten, unter welchen Umständen ein System algebraischer linearer Gleichungen befriedigt werden könne.

Das in dieser Nummer gelehrte Verfahren führt insofern auf trans- [141
scendente Gleichungen, als die Coefficienten $\gamma_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten sich im Allgemeinen vermittelst unendlicher Reihen darstellen lassen (s. meine Arbeit, dieses Journal Bd. 75, S. 212[1]). Indessen wo die Gesetze dieser transcendenten Functionen sich einer ähnlichen Einfachheit wie die Gausssche Π-Function erfreuen, wird die zweite eben angegebene Methode nicht ohne Vortheil anwendbar sein.

28.

Ist die Differentialgleichung (B.) gegeben, und soll entschieden werden, ob dieselbe algebraische Integrale besitzt, so lässt die in voriger Nummer gelehrte zweite Methode Vereinfachungen zu.

Wir wählen

$$(1.) \qquad y_1 = y_{i1}, \quad y_2 = y_{i2}.$$

Nach einem Umlaufe von z um a_i ist alsdann:

$$(2.) \qquad \Phi(y_{i1} j_i^{\delta_i}, y_{i2} j_i^{-\delta_i}) = \varepsilon_i \Phi(y_{i1}, y_{i2}).$$

Diese Gleichung erfordert, dass ε_i die Form hat:

$$(3.) \qquad \varepsilon_i = j_i^{(N-2k_i)\delta_i},$$

wo k_i eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, N$ bedeutet. Andererseits aber muss $\Phi(y_{i1}, y_{i2})$

[1]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 399. Sch.

durch beliebige Umläufe in sich selbst multiplicirt mit einer L^{ten} Wurzel der Einheit übergehen (s. No. 9 Satz I. und No. 10 und 11). Hieraus folgt:

$$(N-2k_i)\,\delta_i L \equiv 0, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i,$$

oder, da δ_i zu $\mathfrak{n}_i$ relativ prim,

$$(N-2k_i)\,L \equiv 0, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i. \tag{4.}$$

Nun ist nach No. 1 $\mathfrak{n}_i$ Divisor von $m = NL$, folglich

$$2k_i L \equiv 0, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i. \tag{5.}$$

Es ist ferner

$$a_\alpha = 0, \quad \text{wenn nicht } 2\alpha \equiv 2k_i, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i,$$

wo α eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, N$ bedeutet, während für

$$2\alpha \equiv 2k_i, \text{ mod. } \mathfrak{n}_i,$$

a_α unbestimmt bleibt.

Hiernach lässt sich, wenn die Differentialgleichung (B.) vorgelegt ist, analog der Tabelle (2.) in No. 19 eine Tabelle (T.) aufstellen, welche für
142] $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die den eben gefundenen Bedingungen genügenden Gestalten der mit je einem der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen gebildeten Primformen enthält.

Ist nun

$$\begin{cases} y_{i_1} = \gamma_{11}^{(ik)} y_{k_1} + \gamma_{12}^{(ik)} y_{k_2}, \\ y_{i_2} = \gamma_{21}^{(ik)} y_{k_1} + \gamma_{22}^{(ik)} y_{k_2}, \end{cases} \tag{6.}$$

so wird

$$\Phi(y_{i_1}, y_{i_2}) = \Phi_k(y_{k_1}, y_{k_2}). \tag{7.}$$

Soll $\Phi(y_{i_1}, y_{i_2})$ Wurzel einer rationalen Function sein, so muss auch nach einem Umlaufe von z um a_k die Form $\Phi(y_{i_1}, y_{i_2})$ in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergehen. Demnach muss $\Phi_k(y_{k_1}, y_{k_2})$ zu den möglichen Formen derselben Tabelle (T.) gehören.

Wendet man demnach die Transformation (6.) für alle von i verschiedenen Werthe von k der Reihe $k = 1, 2, \ldots, \varrho$ an und identificirt $\Phi_k(y_{k_1}, y_{k_2})$ mit den entsprechenden Formen der Tabelle (T.), welche mit y_{k_1}, y_{k_2} gebildet sind, so erhält man ein gewisses System (H.) von Gleichungen, welches befriedigt werden muss.

Da nun umgekehrt eine Form der Tabelle (T.), die aus dem zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsysteme gebildet ist, nach einem Umlaufe von z um diesen Punkt in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, und die Integrale überall von endlicher Ordnung unendlich werden, so ergiebt sich:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form Wurzel einer rationalen Function wird, ist die, dass das System (H.) befriedigt wird.

Heidelberg, im Juli 1875.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 18, Gl. (B′.) $P_1(t)y$ statt $P_1(t)$,
„ 19, Zeile 3 t. IV statt B. 4,
„ 22, „ 4 Function statt Functionen,
„ 26, „ 12 2) statt (2.),
„ 27, Formel (3.) j_χ^0 statt j_χ^2,
„ 28, Gl. (6.) $\frac{\lambda}{l}$ statt $\frac{\lambda}{t}$,
„ 33, Zeile 4 v. u. diese Constante statt dieselbe,
„ 38, „ 10 v. u. oder statt und nicht,
„ 40, „ 11 a_N statt a_n (auch wurde ebenda (2.) als Gleichungsnummer unterdrückt),
„ 43, Formel (1.) $-r$ statt $-r_1$ und $\frac{r(r-1)}{1.2}$ statt $r_2\frac{(r-1)}{1.2}$,
„ 46, Zeile 12 müsste statt muss,
„ 47, „ 6 v. u. y_2^μ statt y^μ,
„ 48, „ 8 aus dem System statt des Systems,
„ 53, „ 7 befriedigen statt darstellen,
„ „, „ 6 v. u. oder von der Ordnung $-\mu$ unendlich statt oder unendlich,
„ 57, „ 5 v. u. und im Folgenden (G.) statt G,
„ 59, „ 3, 4 Wurzel einer rationalen statt eine rationale,
„ „, „ 14 $\gamma_{\lambda\mu}^{(\varphi}$ statt $\gamma_{11}^{(\varphi}$,
„ 60, „ 9 $a_a = 0$ statt $a_a \equiv 0$.

2) Wie Herr F. KLEIN (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, Sitzung vom 26. Juni 1876, s. auch Mathematische Annalen, Bd. 11, 1877, S. 118) bemerkt hat, enthält die Tabelle (12.) auf S. 43 noch überflüssige Formen; vergl. hierzu die Abhandlung XXV.

SCH.

XXI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE.

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, tome II, 1876, p. 158—160.)

Mon Mémoire traite des équations différentielles linéaires du second [158 ordre qui possèdent des intégrales algébriques, et d'une application nouvelle de la théorie des invariants.

Chaque intégrale de l'équation différentielle est une fonction linéaire et homogène de deux solutions fondamentales y_1, y_2 de cette équation, avec des coefficients constants. Une intégrale quelconque, algébrique étant η, toute fonction symétrique des diverses valeurs qu'admet η est une forme binaire des deux quantités y_1 et y_2, qui est elle-même une fonction rationnelle de la variable indépendante z. Mais, comme elle peut être un produit de puissances entières d'autres formes binaires, il est nécessaire de considérer ces formes binaires composées des quantités y_1, y_2, qui représentent des racines de fonctions rationnelles. Désignons leur complexe par Φ.

Si l'on peut satisfaire à l'équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle, les formes linéaires seront du plus petit degré possible, parmi celles du complexe Φ; en général, nous allons chercher le degré minimum N qui puisse être attribué à une forme de ce complexe.

Comme y_1 et y_2 se changent, par les divers chemins qu'on peut faire suivre à la variable z, en des fonctions linéaires et homogènes de ces mêmes quantités, avec des coefficients constants, les diverses valeurs qui en résultent, pour une forme composée de y_1 et y_2, s'obtiennent au moyen de substitutions linéaires effectuées sur y_1 et y_2. En m'appuyant sur cette remarque, je dé-

montre que les covariants d'une forme du complexe Φ représentent aussi des racines de fonctions rationnelles. De là résulte que les covariants de la forme du degré minimum N, dont les degrés sont inférieurs à N, doivent 159] tous s'évanouir identiquement. On pourrait, par suite, obtenir facilement le nombre N, si l'on possédait la solution du problème suivant: Trouver l'expression algébrique des formes binaires de degré m, dont tous les covariants de degré moindre que m disparaissent identiquement. Mais ce problème n'étant pas encore résolu, voici la marche que j'ai suivie pour déterminer N.

Parmi les racines d'une équation algébrique irréductible qui satisfont à l'équation différentielle, je distingue celles dont les quotients ne sont pas constants, en désignant leur ensemble par le nom de système réduit des racines. Chaque forme du complexe Φ, composée des termes d'un système réduit comme facteurs, étant aussi appelée forme primaire, je trouve que la forme de degré minimum N représente, aussi bien que son covariant HESsien, une forme primaire. Je conclus ensuite, de l'expression même du covariant HESsien, que N ne peut être supérieur à 12; puis, au moyen d'une réduction ultérieure, que N n'a qu'une des valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Donc, pour que l'équation différentielle possède des intégrales algébriques, il faut qu'une forme dont le degré est l'un de ces nombres soit une racine d'une fonction rationnelle de la variable indépendante; et le théorème réciproque a lieu, en exceptant le cas de $N = 2$.

Pour reconnaître s'il y a des formes qui représentent des racines de fonctions rationnelles, j'ai employé deux méthodes: l'une ramène à la question de satisfaire à une équation différentielle linéaire, par la racine d'une fonction rationnelle. En effet, toute forme en y_1, y_2, et du degré m, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $m+1$; donc généralement, pour que l'équation différentielle donnée possède des intégrales algébriques, il faut et il suffit qu'une équation différentielle linéaire déterminée, et dont l'ordre ne surpasse point le nombre 13, puisse être satisfaite par la racine d'une fonction rationnelle. Mais la question de satisfaire à une équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle se réduit à la question élémentaire de reconnaître si un système d'équations linéaires admet des solutions finies. Ensuite je montre comment on peut parvenir à ce système d'équations linéaires,

sans former effectivement l'équation différentielle d'ordre $N+1$, mentionnée plus haut.

La seconde des deux méthodes dont j'ai parlé s'appuie sur une recherche directe des changements qu'éprouvent les formes composées de y_1 et y_2, [160 par les chemins divers de z, en employant les coefficients de ces relations linéaires et homogènes, qui lient les systèmes fondamentaux d'intégrales appartenant aux divers points singuliers de l'équation différentielle, relations que j'ai développées dans le Journal de M. BORCHARDT, tome LXXV, page 208[1]).

Enfin j'ajoute quelques théorèmes particuliers, parmi lesquels je ne mentionne ici que le suivant: Les nombres rationnels qui représentent les racines des équations fondamentales déterminantes, appartenant aux divers points singuliers de l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

et à $z = \infty$, étant réduits à leur plus simple expression, si l'un des dénominateurs surpasse le nombre 10, la proposée n'a pas d'intégrale algébrique, à moins cependant que la racine d'une fonction rationnelle ne satisfasse à cette équation, ou à l'équation en y^2.

Heidelberg, janvier 1876.

---

[1]) Mém. XIV, t. I de cette édition, p. 394 et suiv. Sch.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 64, Zeile 14 facteurs statt facteur,

„ „ , „ 5 v. u. 13 statt 12,

„ 65, $\frac{d^2y}{ds^2}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$;

„ 64, „ 17 wurde »du« zwischen »covariant« und »HESSien« unterdrückt.

SCH.

XXII.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

a.

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 82, p. 1494—1497; Séance du 26 juin 1876.)

Lorsque, plusieurs mois après la publication de mon travail sur les [1494 équations linéaires du second ordre, dans le Journal de M. BORCHARDT (t. LXXXI, p. 97 et suiv.[1])), mon attention se porta sur le travail du P. PÉPIN, paru dans les Annali di Matematica da TORTOLINI (t. V, p. 185 [1495 et suiv.), et qu'il rapporte dans sa Note des Comptes rendus du 5 juin 1876, je reconnus aussitôt que les résultats de cet auteur sont en défaut, du moins quant à leur relation avec l'intégration par des fonctions algébriques des équations du second ordre.

Maintenant, comme le P. PÉPIN semble croire, dans la Note citée, avoir, par son Mémoire, répondu aux questions se rapportant à l'intégration sous cette forme plus tôt et plus complètement que je ne l'avais fait, je me vois obligé de montrer que, loin que ce fût fait par le Mémoire du P. PÉPIN, ses résultats sont au contraire en défaut. Ces résultats se résument, comme il l'a énoncé lui-même dans la Note citée, en ce théorème: Si l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py$$

---

[1]) Mém. XX, p. 11 et suiv. du présent volume. Sch.

est algébrique, il y aura toujours une intégrale particulière telle, que la fonction $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ soit une fonction rationnelle de x ou une racine d'une équation du deuxième ou du quatrième degré.

Tout d'abord, je veux signaler un défaut que la solution du P. PÉPIN aurait, lors même qu'elle serait correcte. Si, en effet, pour la résolubilité algébrique, la condition que

$$\zeta = \frac{d \log y}{dx}$$

satisfasse à une équation du quatrième degré était effectivement nécessaire, la même condition ne serait encore aucunement suffisante, car

$$e^{\int \zeta dx}$$

n'est pas toujours algébrique en même temps que ζ.

Mais je vais maintenant faire voir que le théorème du P. PÉPIN, que je viens de citer, est inexact.

Prenons, par exemple, l'équation

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{6z-3}{5}\frac{du}{dz} + \frac{3}{100}u = 0$$

ou, en posant

$$u = z^{-\frac{3}{10}}(z-1)^{-\frac{3}{10}}y,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{21}{100}\frac{-z^2+z-1}{z^2(z-1)^2}y. \tag{1.}$$

D'après le Mémoire de M. SCHWARZ (Journal de M. BORCHARDT, t. LXXV, p. 323, no. XI[1]), cette équation n'a que des intégrales algébriques.

Mais il est utile de prouver cela ici directement en appliquant la méthode de mon Mémoire cité ci-dessus, puisque ce sera ainsi donner la réfutation la plus simple du théorème du P. PÉPIN.

1496] D'après les principes de mon travail dans le tome LXVI du Journal de M. BORCHARDT[2]), on a un système fondamental d'intégrales η_1, η_2, qui, multipliées respectivement par $z^{-\frac{3}{10}}$, $z^{-\frac{7}{10}}$, sont holomorphes (pour parler avec MM. BRIOT et BOUQUET) dans le voisinage du point $z = 0$, et un autre système fondamental d'intégrales y_1, y_2, qui, multipliées respectivement par

[1]) H. A. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II (1890), p. 246. Sch.

[2]) Mém. VI, t. I, p. 159 et suiv. de cette édition. Sch.

$(z-1)^{-\frac{4}{10}}$, $(z-1)^{-\frac{7}{10}}$, sont holomorphes dans le voisinage du point $z=1$. Ces systèmes fondamentaux sont liés entre eux par des relations que l'on peut déduire des principes établis dans mon travail du Journal de M. BORCHARDT (t. LXXV, p. 208 et suiv.[1]), ou que l'on peut mieux tirer du Mémoire de M. KUMMER (Journal de CRELLE, t. XV, p. 58) ou aussi des Œuvres de GAUSS (t. III, posth., p. 210 et suiv.). On conclut de ces relations que, z faisant une circulation autour du point $z=0$, y_1, y_2 se changent respectivement en

$$(2.)\qquad \begin{cases} \sqrt{-1}\left(\dfrac{j}{2\sin\dfrac{4\pi}{10}}y_1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{2\pi}{10}}y_2\right) \\ \text{et} \\ \sqrt{-1}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{\sin\dfrac{2\pi}{10}}y_1-\dfrac{j^3}{2\sin\dfrac{4\pi}{10}}y_2\right), \end{cases}$$

où j est une racine primitive de l'équation $j^{10}=1$.

Il s'ensuit, en posant

$$(3.)\qquad \frac{\cos\dfrac{2\pi}{10}}{2^{\frac{1}{2}}}=\alpha, \qquad \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{2\pi}{10}}=\beta,$$

et

$$(4.)\qquad y_1-\alpha j^{2k}y_2=\varphi_k, \quad y_1-\beta j^{2k+1}y_2=\psi_k,$$

que, par une circulation de z autour du point $z=0$, les fonctions

$$y_1,\ y_2,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4$$

se changent respectivement en

$$\varphi_2,\ \psi_4,\ \varphi_0,\ \varphi_4,\ \psi_3,\ y_1,\ \psi_0,\ y_2,\ \varphi_3,\ \psi_2,\ \psi_1,\ \varphi_1,$$

à des facteurs numériques près, et que le produit de tous ces facteurs numériques est égal à $-\sqrt{-1}$. Donc la forme

$$(5.)\qquad \varphi(y_1,y_2)=y_1y_2\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\psi_0\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4=y_1y_2(y_1^5-\alpha^5y_2^5)(y_1^5+\beta^5y_2^5),$$

déjà invariable par une circulation de z autour du point $z=1$, se change [1497

[1] Mém. XIV, t. I, p. 394 et suiv. de cette édition. Sch.

par une circulation de z autour du point $z = 0$ en elle-même multipliée par $-\sqrt{-1}$. Par conséquent $\varphi(y_1, y_2)$ est une racine d'une fonction rationnelle. Comme une racine d'une fonction rationnelle ne varie pas, à une racine de l'unité comme facteur près, quand z fait une circulation autour d'un point critique, et comme y_1, y_2 acquièrent par une circulation de z autour du point $z = 1$ respectivement les facteurs j', j'', une forme binaire composée de y_1, y_2 du premier ou du second degré et égale à une racine d'une fonction rationnelle doit être ou y_1, ou y_2, ou $y_1 y_2$. Mais aucune de ces formes n'a la propriété de se transformer en elle-même, à une racine de l'unité comme facteur près, par une circulation de z autour du point $z = 0$. Une forme du douzième degré étant donc racine d'une fonction rationnelle, sans qu'une forme du premier ou du second degré ait la même propriété, il suit des théorèmes cités pages 127 et 100 de mon Mémoire[1]) que l'équation différentielle n'a que des intégrales algébriques.

---

b.

(Comptes rendus etc., t. 83, 1876, p. 46—47; Séance du 3 juillet 1876.)

46] Nous venons de voir*) que, dans notre cas, une forme primaire, comme je l'ai définie dans mon Mémoire, est d'un degré plus élevé que le deuxième. Il suit alors du même Mémoire que le moindre degré N d'une telle forme ne pourrait avoir qu'une des valeurs 4, 6, 8, 10, 12. Nous allons faire voir que, dans notre cas, N est égal à 12; car, en soumettant une forme binaire composée de y_1, y_2 et du degré N, où N a une des valeurs que nous venons d'indiquer, aux conditions: 1° d'être invariable par une circulation de z autour du point $z = 1$, à des racines de l'unité comme facteur près; 2° que ni la forme même, ni son covariant HESSien ne contienne des facteurs quadratiques (voir p. 114 et 116 de mon Mémoire[3])), on déduit qu'une telle forme ne peut

*) Comptes rendus, séance du 26 juin 1876, t. LXXXII, p. 1494[2]).

1) Mémoire XX, p. 44 et 14 du présent volume. Sch.

2) Note précédente. Sch.

3) p. 30 et 32 du présent volume. Sch.

être d'un degré moindre que le douzième et qu'elle est composée semblablement à la forme (5.).

Soit y une intégrale quelconque de l'équation (1.) et soit l'équation algébrique à laquelle satisfait $\zeta = \frac{d \log y}{dz}$ du $n^{\text{ième}}$ degré. D'après un théorème d'ABEL (Journal de CRELLE, t. VI, p. 77 [1]); voir aussi le Mémoire de M. LIOUVILLE dans le Journal de l'École Polyt., Cah. XXIII), $\log y$ a la forme $A \log u$, u étant une fonction rationnelle de z et de ζ et A en notre cas un nombre rationnel. Donc une certaine puissance de y, soit y^{μ}, est une fonction rationnelle de z et de ζ, et satisfait par conséquent aussi, comme l'on sait, à une équation dont le degré ne surpasse pas le nombre n. D'après le théorème du P. PÉPIN cité ci-dessus, pour une certaine intégrale, n ne surpasserait pas le nombre 4. Par conséquent, on pourrait, pour cette intégrale, trouver un nombre entier μ tel que y^{μ} satisfasse à une équation dont le degré ne surpasserait pas le nombre 4, c'est à dire que y ne pourrait acquérir par les chemins divers de z plus de quatre valeurs dont les quotients ne soient pas racines de l'unité. Le système réduit (voir mon Mémoire p. 111 [2]) de cette équation, n'ayant plus ainsi que quatre termes, offrirait une forme primaire, dont le degré ne surpasserait pas le nombre 4. Or nous avons démontré ci-dessus que le moindre degré que puisse avoir une forme primaire est le [47 douzième. Donc le théorème du P. PÉPIN est en défaut.

Je pourrais, du reste, en entrant dans les développements du Mémoire déjà cité du P. PÉPIN (contenu dans les Annali [3]), faire ressortir plusieurs erreurs qui l'ont porté au théorème que nous venons de réfuter; mais cela étendrait cette Note plus qu'il ne me semble nécessaire.

Enfin je remarque que l'on peut comprendre aussi par ce qui précède que le P. PÉPIN est en erreur, en croyant pouvoir réduire mes formes canoniques au premier ou au second degré, comme il l'a annoncé à la fin de sa Note, p. 1326 des Comptes rendus [4]).

1) Oeuvres compl. t. II (1891), p. 276. Sch.
2) p. 27 du présent volume. Sch.
3) t. V, 1863. Sch.
4) t. 82, 1876. Sch.

ANMERKUNGEN.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 68, Zeile 9 v. u. XI statt 11,
„ „, „ 13 v. u. ou statt où,
„ 69, „ 4 208 statt 209,
„ 70, „ 2 v. u. son covariant HESSien statt sa covariante HESSienne,
„ 71, „ 4 $\zeta = \frac{d \log y}{dz}$ statt $\zeta \frac{d \log y}{ds}$,
„ „, „ 9 de s et de ζ statt de s et ζ,
„ „, „ 13 v. u. p. 111 statt p. 3.

SCH.

XXIII.

SELBSTANZEIGE DER ABHANDLUNG: »ÜBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN, UND EINE NEUE ANWENDUNG DER INVARIANTENTHEORIE«, BORCHARDTS JOURNAL, BAND 81, S. 97 sqq.[1]).

(Repertorium für reine und angewandte Mathematik, Bd. I, 1877, S. 1—9.)

---

1. [1

Es sei

(A.) $$\frac{d^2u}{dz^2} + p_1\frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welcher eine Wurzel u der irreductiblen algebraischen Gleichung:

(1.) $$A_m u^m + A_{m-1}u^{m-1} + \cdots + A_1 u + A_0 = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, genügt, so genügen ihr die sämmtlichen Wurzeln derselben Gleichung (Siehe S. 100).

Besitzt die Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient nicht für jedes z constant ist, so bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, d. h. jedes Integral der Differentialgleichung hat die Form $c_1u_1 + c_2u_2$, wo c_1, c_2 constant sind (siehe die Abhandlung des Verfassers im 66. Bande des BORCHARDTschen Journals[2]) No. 2*)). Hieraus ergiebt sich, dass in diesem Falle

*) Es sollen im Folgenden die Arbeiten des Verfassers im BORCHARDTschen Journal einfacher durch blosse Angabe des Bandes, in welchem sie enthalten sind, bezeichnet werden.

[1]) Abh. XX, dieses Bandes, S. 11 ff. Die Übertragung der in der folgenden Selbstanzeige angegebenen Seitenzahlen der Originalabhandlung in die entsprechenden Zahlen dieser Ausgabe wurde unterlassen. Sch.

[2]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung algebraisch sind (Siehe S. 100).

Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1.) für jedes z constant, so hat sie die Form:

(1a.) $$A_m u^m + A_0 = 0,$$

und die Differentialgleichung wird durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt. — Dieser Satz wird (S. 100—101) aus einem allgemeineren auf S. 99 bewiesenen hergeleitet, welcher folgendermassen lautet: Besitzt die irreductible Gleichung (1.) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

2] Hiernach sind also, wenn die Differentialgleichung (A.) algebraische Integrale besitzt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Sie wird durch die Wurzel φ einer rationalen Function befriedigt. In diesem Falle ist es möglich aber nicht nothwendig, dass die Differentialgleichung (A.) noch ausserdem ein algebraisches Integral ψ besitzt, ohne dass $\frac{\psi}{\varphi}$ constant ist, dass also der Differentialgleichung nur algebraische Integrale genügen. Tritt dieses ein, so hat die Differentialgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen, welches aus zwei verschiedenen Wurzeln rationaler Functionen besteht*).

2) Die Differentialgleichung wird durch die Wurzeln einer irreductiblen algebraischen Gleichung befriedigt, von denen mindestens der Quotient zweier

*) Man erkennt dieses am einfachsten folgendermassen:

Nach (B. 66[1]) No. 4) hat ψ in der Umgebung eines singulären Punktes a der Differentialgleichung die Form

(1.) $$\psi = c_1\varphi + c_2(z-a)^\lambda \chi(z),$$

wo c_1 und c_2 Constanten und $\chi(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darstellt, welche für $z = a$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass $\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a mit einer Potenz von $z-a$ multiplicirt eindeutig wird. Da diese Function algebraisch und für alle übrigen endlichen Werthe von z eindeutig ist, so ist sie Wurzel einer rationalen Function. Bezeichnen wir dieselbe mit t, so ergiebt sich aus einem Satze von ABEL (vergl. LIOUVILLE, Journal de l'École Polytech. cah. 22, p. 131), dass

$$\frac{\psi}{\varphi} = \int t\,dz = \beta t + C,$$

wo β eine rationale Function von C eine Constante bedeutet. Demnach ist

(2.) $$\psi = \beta\varphi t + C\varphi.$$

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

nicht für jedes z constant. In diesem Falle sind die sämmtlichen Integrale algebraisch.

Der mit 1) bezeichnete Fall ist leicht zu erledigen nach einem für lineare Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung gültigen Verfahren. Sind nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die sämmtlichen singulären Punkte einer solchen Differentialgleichung, so hat eine ihr genügende Wurzel einer rationalen Function die Form:

$$u = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_\varrho)^{\alpha_\varrho} g(z),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet (S. 101). Es werden zunächst (S. 102) gewisse algebraische Gleichungen ratio- [3
nale Wurzeln besitzen müssen, welche die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ liefern. Alsdann hat ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zuzulassen, welche die Werthe der Coefficienten von $g(z)$ gewähren.

2.

Bei der Behandlung des Falles 2) voriger Nummer ist es zweckmässig, die Differentialgleichung (A.) durch die Substitution

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} y$$

in eine Differentialgleichung

$$\text{(B.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

zu verwandeln. Der Untersuchung werden gewisse aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_1, y_2 gebildete Formen zu Grunde gelegt. Es sei nämlich η ein algebraisches Integral dieser Differentialgleichung, welches einer irreductiblen Gleichung

$$\text{(1.)} \qquad A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_0 = 0$$

mit rationalen Coefficienten genügt Unter den Wurzeln derselben seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient zweier derselben für jedes z constant ist, so wird ihre Gesammtheit (S. 111) als das reducirte Wurzelsystem der Gleichung (1.) bezeichnet.

Das Product

$$\Pi = \eta\eta_1\eta_2\ldots\eta_{m-1}$$

ist eine algebraische Function, welche für jeden Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, d. h. Wurzel einer rationalen Function (S. 114). Andererseits ist η_i als Integral der Differentialgleichung (B.) der Form $c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2$, wenn c_{i1}, c_{i2} Constanten bezeichnen. Demnach ist $\Pi = f(y_1, y_2)$ eine aus y_1, y_2 gebildete Form n^{ten} Grades. — Während also in dem Falle, dass die Differentialgleichung (B.) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine lineare Form $c_1y_1 + c_2y_2$ gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, so sind in dem allgemeineren Falle, so fern die Differentialgleichung nur algebraische Integrale hat, Formen höheren Grades gleich Wurzeln rationaler Functionen. — Der niedrigste Grad einer Form dieser Art werde mit N bezeichnet (S. 116). Es wird nachgewiesen (Siehe 4] S. 123, Satz II.), dass die Zahl N niemals grösser als zwölf, und weiter (Siehe S. 126), dass sie eine gerade Zahl sei.

Bezeichnen wir den Complex aller Formen, welche Wurzeln rationaler Functionen aequivalent sind, mit Φ, so zeichnen sich unter diesen diejenigen aus, welche nur die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung als Factoren enthalten, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Glieder alle und jedes zur ersten Potenz. Dieselben werden Primformen genannt (S. 114). Jede Form des Complexes Φ lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen (S. 115). Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Primform (S. 116).

3.

Nach Ermittelung der eben angegebenen oberen Grenze für die Zahl N werden im Wesentlichen zwei Methoden angewendet, um über die Frage zu entscheiden, ob die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale habe oder nicht.

I. Methode.

Eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung (B.) y_1, y_2 gebildete Form μ^{ten} Grades genügt einer linearen Differentialgleichung $\mu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche in der Arbeit S. 129 als Differentialgleichung (C.) bezeichnet ist. Dieselbe ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung, welcher y^μ genügt, wo y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (B.) ist (S. 129—131).

Wird also die Differentialgleichung (B.) nur durch algebraische Integrale befriedigt, so muss die Differentialgleichung (C.) für $\mu = N$, demnach, wenn nicht $N = 1$, d. h. schon der Differentialgleichung (B.) eine Wurzel einer rationalen Function genügt, für einen der geradzahligen Werthe von μ die nicht die Zahl 12 übersteigen, durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden (S. 131).

Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ die grösser sind als 2, so hat auch umgekehrt die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale (S. 131). Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden: Ist eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung (B.) ein algebraisches Integral, ein Satz, welcher S. 127—128 bewiesen ist.

Hat aber die Differentialgleichung (C.) zuerst für $\mu = 2$ eine Wurzel φ [5 einer rationalen Function zum Integral, so ist $\varphi(z)^2$ eine rationale Function und

$$\varphi(z)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(z)}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(z)}{dz^2} - 4P\right]$$

eine constante Zahl λ. Ist nun

$$\lambda\int\frac{dz}{\varphi(z)}$$

gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch (S. 131). Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf die S. 117—118 gemachten Entwickelungen.

Hiermit ist die Untersuchung der Frage, wie die Differentialgleichung (B.) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, bis auf die Betrachtung von $\int\frac{dz}{\varphi(z)}$, die im letztangegebenen Falle nöthig wird, auf die in No. 1 dieser Notiz angeführte Aufgabe zurückgeführt, nämlich zu bestimmen, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, d. h. nach S. 102 zu untersuchen, ob ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zulässt.

Es wird (S. 132—134) nachgewiesen, dass bei der Anwendung dieser Methode die Differentialgleichung (C.) nicht aufgestellt zu werden braucht,

dass man vielmehr ein derselben gleichbedeutendes sich unmittelbar darbietendes System von Differentialgleichungen der Rechnung zu Grunde legen kann.

II. Methode.

Diese stützt sich auf Entwickelungen, welche der Verfasser im Bande 75 des BORCHARDTschen Journals S. 208 sqq.[1]) in Bezug auf die Coefficienten der linearen homogenen Relationen gegeben hat, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten einer linearen Differentialgleichung gehörigen Fundamentalsysteme derselben mit einander verbunden werden; Entwickelungen, durch welche diese Coefficienten aus den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten bestimmt werden.

Indem nun (S. 138—140) direct die Einwirkungen der verschiedenen Umläufe von z, als eben so vieler mit einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 aus-
6] geführter linearer Substitutionen, auf eine aus y_1, y_2 gebildete Form untersucht werden, erhalten wir ein gewisses System von Gleichungen zwischen den Coefficienten jener linearen Relationen, den Coefficienten der Primform niedrigsten Grades, und den in P enthaltenen Constanten. Es lässt sich demnach bestimmen, wie diese Constanten beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale besitze.

Der Verfasser bemerkt jedoch (S. 141), dass die erste Methode vor dieser den Vorzug besitze, die endgültige Entscheidung auf ein System algebraischer linearer Gleichungen zurückzuführen, während die zweite Methode die Untersuchung transcendenter Gleichungen erforderte. Indessen wo die Gesetze dieser transcendenten Functionen sich einer ähnlichen Einfachheit erfreuen wie die GAUSSsche Π-Function, könne diese Methode nicht ohne Vortheil angewendet werden.

Ist umgekehrt die Differentialgleichung (B.) gegeben, und soll entschieden werden, ob diese algebraische Integrale besitzt, so lässt die zweite Methode Vereinfachungen zu (Siehe S. 141—142), indem gelehrt wird, eine Tabelle von ähnlicher Beschaffenheit aufzustellen, wie die auf S. 126, und die Relationen zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen auf dieselbe anzuwenden.

---

[1]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 394 ff. Sch.

4.

Es ist in No. 2 dieser Notiz das Resultat erwähnt worden, dass die Zahl N nicht grösser als 12 sei. Dasselbe ist eine unmittelbare Folge von Entwickelungen, welche sich auf die Eigenschaften derjenigen algebraischen Functionen, welche der Differentialgleichung (B.) genügen, und die Natur der binären Formen, welche aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 derselben gebildet sind, beziehen (S. 102—126). Die hauptsächlichen Elemente dieser Entwickelungen sind die folgenden:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch, so ist jedes Integral derselben eine rationale Function von z und einem beliebigen anderen Integrale (S. 107).

Wenn ein algebraisches Integral y auf einem gewissen Wege in yj übergeht, wo j constant, so ist j eine primitive ganzzahlige l^{te} Wurzel der Einheit; es ist l Divisor des Grades m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, und jedes Integral hat die Form

$$(\alpha' + \beta' c_1) y + \beta' y^{l-1} \psi(y^l),$$

worin α', β' Constanten, $\psi(y^l)$ eine ganze rationale Function von y^l vom Grade $\frac{m}{l} - 1$ mit in z rationalen Coefficienten bedeutet. Die Grösse c_1 ist ebenfalls constant, wenn $l > 2$ (S. 108).

Die Function

$$y^{l-1} \psi(y^l)$$

ist ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (B.) (S. 108—109).

Ist $F(y)$ ein Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und

1) $$(\alpha.) \quad F(y) = \beta' y^{l-1} \psi(y^l) \quad (\beta' \text{ constant}),$$

so sind die Glieder der Reihe

$$(\beta.) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F(yj^{l-1})$$

nur um constante Factoren verschieden.

2) Ist $F(y)$ nicht der Form (α.) und l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (β.) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist $F(y)$ nicht der Form (α.) und l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe

$$(\gamma.) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right)$$

gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = -F(yj^i) \quad \text{(S. 110—111).}$$

Der Grad m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher ein algebraisches Integral der Differentialgleichung (B.) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Man kann daher mit Recht m den zur Differentialgleichung (B.) gehörigen Grad nennen (S. 111).

Ist $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen algebraischen Gleichung m^{ten} Grades, welcher das Integral y genügt, und $j, j_1, j_2, \ldots$, die Reihe der Zahlen, mit welchen irgend welche der Glieder dieses Systems multiplicirt die anderen Wurzeln derselben Gleichung reproduciren, so sind diese Zahlen Einheitswurzeln. Sie seien resp. l^{te}, l_1^{te}, l_2^{te}, ..., primitive Wurzeln der Einheit, und unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots, l$ die grösste, so ist l ein Multiplum von $l_1, l_2, \ldots$, und es liefert das System:

$$y_i,\ y_i j,\ y_i j^2,\ \ldots,\ y_i j^{l-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (S. 111—113).

s] Die Zahl l wird der Index des reducirten Wurzelsystems genannt, es ist also das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems in den Index desselben gleich dem Grade der Gleichung (S. 113).

Von jeder Form des in No. 2 dieser Notiz mit Φ bezeichneten Complexes gilt der Satz, dass sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft enthält (S. 115).

Gehört eine Form dem Complexe Φ an, so gehört auch jede Covariante derselben dem Complexe Φ an (S. 106).

Die Hessesche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform (S. 116).

Die Linearfactoren einer Primform niedrigsten Grades bilden ein reducirtes Wurzelsystem mit kleinster Gliederanzahl N. Es wird der Index desselben mit L (S. 115) bezeichnet.

Es sei η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades $\Phi(y_1, y_2)$, ζ irgend ein Factor der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ derselben. Ist

$$(\delta.) \quad \zeta = \beta' \eta^{L-1} \psi(\eta^L),$$

wo β' constant und

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_1 \eta^L + \cdots + c_{(N-1)L} \eta^{(N-1)L},$$

so ist $N = 4$ (S. 119).

Ist kein Factor ζ der Form $(\delta.)$, und $N > 2$, und setzt man $\lambda = \frac{L}{2}$ oder L, je nachdem L gerade oder ungerade, so ist λ Divisor von $2N-4$ (S. 121) und $\Psi(y_1, y_2)$ der Form

$$(\varepsilon.) \quad \Psi(y_1, y_2) = C[\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_1^\lambda y_1^\lambda][\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_2^\lambda y_1^\lambda] \ldots [\beta_{\lambda'}^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_{\lambda'}^\lambda y_1^\lambda],$$

$\lambda' = \frac{2N-4}{\lambda}$ (S. 122).

Die Hessesche Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ der Hesseschen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2} \Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1 und y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind (S. 122).

Die Zahl λ ist kleiner als 6 (S. 122).

Die Zahl N ist nicht grösser als 12 (S. 123).

Die Covarianten niedrigern als N^{ten} Grades einer Primform niedrigsten Grades müssen identisch verschwinden (Siehe S. 98).

Mit Hülfe der Eigenschaften der Primformen niedrigsten Grades wird [9 eine Tabelle für die möglichen Gestalten derselben hergeleitet (S. 123—126), aus welcher sich namentlich ergiebt, dass N von den die Zahl 12 nicht übersteigenden Werthen nur die geradzahligen annehmen kann.

5.

Zum Schluss noch einige besondere Resultate, welche zeigen, wie man in concreten Fällen aus den in der Arbeit entwickelten Principien einfache Mittel der Entscheidung gewinnen kann, ob die Differentialgleichung (B.) algebraische Integrale hat.

Sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differentialgleichungen (12.) No. 4 der Arbeit

in Bd. 66[1]), und es müssen die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nach (Bd. 66 No. 6 II[2])) rationale Zahlen sein (s. S. 104 der vorl. Arbeit). Ist dieses erfüllt, und irgend einer der Nenner dieser auf ihre kleinste Benennung gebrachten Zahlen grösser als 10, so besitzt die Differentialgleichung (B.) kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird (Siehe S. 134—135).

Sind die Nenner derselben Zahlen sämmtlich von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, und wird die Differentialgleichung (C.) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differentialgleichung (B.) entweder überhaupt kein algebraisches Integral oder die Wurzel einer rationalen Function (S. 135—136).

Sind sämmtliche Nenner gleich 2, ferner $\frac{\vartheta_i}{n_i}$ die in algebraischem Sinne grössere der beiden Wurzeln $\frac{\vartheta_i}{n_i}$, $1-\frac{\vartheta_i}{n_i}$ der zum singulären Punkte a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich y_{i1} das zu $\frac{\vartheta_i}{n_i}$ als Exponent gehörige Integral (s. Bd. 66, No. 6[3])), und setzt man voraus, dass für alle singulären Punkte der Coefficient von $(z-a_i)^{-\vartheta_i-1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{y_{i1}^2}$ nach steigenden Potenzen von $z-a_i$ verschwindet, so wird die Differentialgleichung (B.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt (Siehe S. 137—138).

Heidelberg. L. Fuchs.

---

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.
2) Ebenda, S. 199. Sch.
3) Ebenda, S. 196 ff. Sch.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 76, Zeile 18 jedes statt jeden,
„ 78, „ 8 Entwickelungen statt Einwirkungen,
„ „, „ 8 v. u. GAUSSsche Π-Function statt GAUSSschen Π-Functionen,
„ 79, „ 7 gebildet sind statt überhaupt,
„ 80, „ 12 die Reihe der Zahlen statt die Zahlen,
„ 81, „ 7 Factor ζ statt ζ Factor,
„ „, Gl. (8.) $(-1)^{\lambda-1}\alpha_1^\lambda y_1^\lambda$ statt $(-1)^{\lambda-1}L_1^\lambda y_1^\lambda$,
„ 82, Zeile 17 No. 6 statt No. 5.

SCH.

XXIV.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, AUXQUELLES SATISFONT LES MODULES DE PÉRIODICITÉ DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DES DEUX PREMIERES ESPÈCES.

Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 83, 1877, p. 13–37.)

Dans le mémoire suivant je conçois le module k des fonctions ellip- [13
tiques comme variable indépendante, et je définis les quantités K et K' comme des fonctions de cette variable au moyen de l'équation différentielle à laquelle elles satisfont. Soient K et K' des valeurs déterminées de ces fonctions pour une valeur donnée de k; leurs valeurs qui correspondent aux chemins de la variable indépendante menant au même point k ont respectivement les formes $a_1 K + b_1 K'$, $a_2 K + b_2 K'$, où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des nombres indépendants de k. Je détermine ces nombres au moyen des principes établis dans mon mémoire (Journ. de M. BORCHARDT, t. 71, p. 91 [1]), et ensuite je démontre que la partie réelle du quotient

$$H = \frac{a_2 K + b_2 K'}{a_1 K + b_1 K'}$$

est ou nulle, ou positive. Ce théorème comprend comme cas spécial le théorème connu dans la théorie des fonctions elliptiques, qui dit que, pour une valeur fixe de k, la partie réelle du quotient des deux intégrales

---

[1]) Mém. VIII, t. I de cette édition, p. 241 et suiv. Sch.

définies K' et K est positive. Comme la démonstration de notre théorème plus général s'appuie sur des principes tout-à-fait différents de ceux qu'on applique pour démontrer le théorème spécial dans la théorie des fonctions elliptiques, elle en fournit en même temps une nouvelle démonstration.

Je considère ensuite, dans l'équation $q = e^{-\pi H}$, q comme variable indépendante, et je fais voir que la fonction k^2 de q qui en résulte par l'inversion est, de même que K, une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{R}$, décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. De cette recherche il résulte une connexion entre k^2 et q telle que, lorsque q décrit un chemin quelconque dans l'intérieur de $\mathfrak{R}$, partant du centre et 14] aboutissant à un point quelconque de la périphérie, la fonction k^2 partant du point $k = 0$ doit aboutir à l'un des points $k = 1$, $k = \infty$. Il s'ensuit que chaque point de la circonférence de $\mathfrak{R}$ est un point de discontinuité de la fonction k^2 de q. Voilà la cause de la propriété déjà signalée de cette fonction, de ne point permettre d'extension par continuité au delà de cette périphérie.

La dépendance qu'il y a entre k^2 et q et que nous venons d'indiquer, peut également être caractérisée de cette manière que, dans le plan de k, à un chemin quelconque joignant le point $k = 0$ à l'un des points $k = 1$, $k = \infty$, correspond un chemin de q, contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{R}$, partant de $q = 0$ et aboutissant à la périphérie, de sorte que la fonction k^2 de q, holomorphe dans l'intérieur de $\mathfrak{R}$, épuise tous les points du plan de k.

Je considère en second lieu les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce, J et J', comme fonctions de la variable indépendante k, en les définissant par une équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elles satisfont. Les valeurs diverses de J et J' qui correspondent aux chemins divers de la variable indépendante menant au même point k, ont respectivement les formes $\alpha_1 J + \beta_1 J'$, $\alpha_2 J + \beta_2 J'$, où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des nombres indépendants de k. Ayant déterminé ces nombres, je fais l'étude du quotient

$$Z = \frac{\alpha_1 J + \beta_1 J'}{\alpha_2 J + \beta_2 J'}.$$

Ensuite je considère, dans l'équation $s = e^{-\pi Z}$, s comme variable indépendante, et je démontre que la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s, qui en résulte par l'inversion, est aussi holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{L}$, décrit autour du point $s = 0$

comme centre avec un rayon égal à l'unité. Mais on trouve une différence essentielle entre la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s et la fonction k^2 de q dont il a été question plus haut: c'est que les valeurs de k correspondant aux points de l'intérieur de $\mathfrak{P}$, n'épuisent pas tous les points du plan de k; au contraire la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s permet une extension par continuité au delà de la périphérie de $\mathfrak{P}$, de telle manière que dans l'extérieur de $\mathfrak{P}$ elle est aussi holomorphe pour toute valeur finie de q. Enfin notre recherche même éclaircira pourquoi c'est $\frac{J}{J'}$ et non $\frac{J'}{J}$ qui joue le rôle analogue à $\frac{K'}{K}$.

1. [15

Supposons k réel et en valeur absolue inférieur à l'unité, et posons

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

Si en prenant la racine carrée avec le signe positif, on effectue les intégrations tout le long de l'axe réel des x, ces intégrales seront des fonctions de k bien déterminées. Soient $x^2 = y$ et $k^2 = \frac{1}{u}$, de sorte que u est réel et $\geqq 1$; on aura

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{u}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \qquad K' = \frac{1}{2}\sqrt{u}\int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

où la racine $\sqrt{u}$ est positive et les intégrations s'effectuent le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée.

En posant

$$\eta_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \qquad \eta_2 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

on a

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_1, \qquad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_2.$$

2.

Les valeurs des fonctions η_1, η_2 de u étant définies dans le numéro précédent pour des valeurs limitées de la variable u, je me propose de les déterminer pour des valeurs quelconques complexes de cette variable. Pour cela je recours à leur propriété connue de satisfaire à l'équation différentielle

$$\text{(A.)} \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0.$$

(Voir p. e. mon mémoire dans le Journ. de M. BORCHARDT, t. 71, p. 118[1]), éq. (7.)).

Au même endroit (p. 122[2])) j'ai démontré ce qui suit:

Au point singulier $u = 0$ appartient le système fondamental d'intégrales v_{01}, v_{02} qui, dans le domaine du même point, ont les formes:

$$(1.) \qquad \begin{cases} v_{01} = 1 + \sum_1^\infty {}_b \left(\dfrac{1.3.5 \ldots (2b-1)}{2.4.6 \ldots 2b} \right)^2 u^b, \\ v_{02} = H_0(u)\, v_{01} - v_{01} \log u, \end{cases}$$

où $H_0(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par 16] l'équation:

$$H_0(u) = 4 \log 2 + \int_0^u \frac{1 + v_{01}^2 (u-1)}{v_{01}^2\, u(u-1)}\, du.$$

Au point singulier $u = 1$ appartient le système fondamental d'intégrales v_{11}, v_{12} qui, dans le domaine du point $u = 1$, ont les formes:

$$(2.) \qquad \begin{cases} v_{11} = 1 + \sum_1^\infty {}_b (-1)^b \left(\dfrac{1.3.5 \ldots (2b-1)}{2.4.6 \ldots 2b} \right)^2 (u-1)^b, \\ v_{12} = H_1(u)\, v_{11} + v_{11} \log (u-1), \end{cases}$$

où $H_1(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par l'équation:

$$H_1(u) = -4 \log 2 + \int_1^u \frac{1 - v_{11}^2\, u}{u(u-1)\, v_{11}^2}\, du.$$

Enfin au point singulier $u = \infty$ appartient le système fondamental d'intégrales $v_{\infty 1}, v_{\infty 2}$ qui, dans le domaine de $u = \infty$, ont les formes:

$$(3.) \qquad \begin{cases} v_{\infty 1} = \left(\dfrac{1}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_1^\infty {}_b \left(\dfrac{1.3.5 \ldots (2b-1)}{2.4.6 \ldots 2b} \right)^2 \left(\dfrac{1}{u} \right)^b \right], \\ v_{\infty 2} = v_{\infty 1} H_\infty(u) + v_{\infty 1} \log \dfrac{1}{u}, \end{cases}$$

où $H_\infty(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par l'équation:

$$H_\infty(u) = -4 \log 2 - \int_\infty^u \frac{1 + v_{\infty 1}^2 (1-u)}{v_{\infty 1}^2\, u(u-1)}\, du.$$

---

1) Mém. VIII, t. I de cette édition, p. 271. Sch.

2) ibid. p. 275. Sch.

On a par conséquent

$$\eta_{11} = a_1 v_{11} + b_1 v_{12}; \quad \eta_{12} = a_2 v_{11} + b_2 v_{12}, \tag{4.}$$

où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des constantes que nous allons déterminer.

En posant

$$\eta_{11} = A_1 + B_1$$

et

$$A_1 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}\,dy, \qquad B_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(u-y)}},$$

où l'on doit prendre $\sqrt{y}$ positive et effectuer les intégrations le long de l'axe réel des y avec les signes positifs des racines carrées, on a

$$A_1 = 2\log 2, \quad \text{pour} \quad u = 1;$$

puis on a

$$B_1 = 2\log(\sqrt{u}+1) - \log(u-1).$$

Donc [17

$$\lim[\eta_{11} + \log(u-1)] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u = 1.$$

En ayant égard aux équations (2.), il suit de la première des équations (4.):

$$b_1 = -1, \quad a_1 = 0.$$

Par un calcul analogue il vient:

$$\lim \eta_{12} = \pi, \quad \text{pour} \quad u = 1;$$

et puis

$$b_2 = 0, \quad a_2 = \pi.$$

La relation (4.) devient ainsi:

$$\eta_{11} = -v_{12}, \quad \eta_{12} = \pi v_{11}. \tag{B.}$$

Nous avons de même

$$\eta_{11} = c_1 v_{\infty 1} + d_1 v_{\infty 2}; \quad \eta_{12} = c_2 v_{\infty 1} + d_2 v_{\infty 2}, \tag{5.}$$

où c_1, d_1, c_2, d_2 sont des constantes que nous allons déterminer. On voit immédiatement que

$$\lim \eta_{11}\sqrt{u} = \pi, \quad \text{pour} \quad u = \infty.$$

Il s'ensuit donc des équations (3.)

$$d_1 = 0, \quad c_1 = \pi.$$

Posons $y = u-(u-1)z$ dans η_2; on aura

$$\eta_2\sqrt{u} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}} = A_\infty + B_\infty$$

et

$$A_\infty = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{z})\,dz}{\sqrt{z(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}}, \qquad B_\infty = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}},$$

où les intégrations doivent être effectuées de la même manière que dans les intégrales A_1, B_1. On a

$$\left.\begin{aligned} \lim A_\infty &= 2\log 2, \\ \lim B_\infty &= 2\log 2 - \lim\log\frac{1}{u}, \end{aligned}\right\} \text{(pour } u=\infty);$$

donc

$$\lim\left[\eta_2\sqrt{u} + \log\frac{1}{u}\right] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u=\infty.$$

Par conséquent, en ayant égard aux équations (3.), il vient

$$d_2 = -1, \quad c_2 = 0.$$

18] Nous obtenons ainsi:

(C.) $$\eta_1 = \pi v_{\infty 1}, \quad \eta_2 = -v_{\infty 2}.$$

Posons enfin

(6.) $$\eta_1 = e_1 v_{01} + f_1 v_{02}, \quad \eta_2 = e_2 v_{01} + f_2 v_{02}.$$

La détermination des constantes e_1, f_1, e_2, f_2 exige un autre procédé, parce que η_1, η_2 ne sont définies dans le no. précédent que pour des valeurs réelles de u qui surpassent l'unité. L'une ou l'autre des équations (B.) et (C.) est propre à définir les fonctions η_1, η_2 pour toute l'étendue du plan u, les fonctions $v_{11}, v_{12}, v_{\infty 1}, v_{\infty 2}$ étant déterminées dans ce plan. (Voir mes mémoires t. 66, p. 121; t. 75, p. 177 du Journ. de M. BORCHARDT[1]). Nous pourrions aussi définir η_1, η_2 pour toute l'étendue du plan, en fixant leurs valeurs par des intégrales définies d'après la méthode de mon mém. t. 71, p. 123[2]). Une circulation de u autour du point $u = 1$ change η_1, η_2 en des fonctions linéaires

1) Mém. VI, p. 159; mém. XIV, p. 361 du t. I de cette édition. Sch.

2) Mém. VIII, t. I de cette édition, p. 276. Sch.

et homogènes de ces quantités, représentées d'après les équations (B.) par la substitution:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même une circulation de u autour de $u = \infty$ change η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités, représentées d'après les équations (C.) par la substitution:

$$S_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Et si le même contour est décrit dans le sens inverse, η_1, η_2 deviennent des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités représentées par la substitution:

$$S_{-\infty} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Désignons par

$$S_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

la substitution qui sert à déterminer les fonctions linéaires et homogènes des quantités η_1, η_2, qui résultent d'une circulation de u autour du point $u = 0$; on aura

$$S_{-\infty} = S_1 S_0, \tag{7.}$$

en désignant, comme on le fait usuellement, une substitution composée de deux ou de plusieurs autres, par le produit des substitutions composantes.

L'équation (7.) peut être écrite ainsi [19

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\gamma i & \beta - 2\delta i \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

et fournit tout de suite:

$$\alpha - 2\gamma i = -1, \quad \beta - 2\delta i = 0, \quad \gamma = -2i, \quad \delta = -1,$$

ou

$$\alpha = 3, \quad \beta = -2i, \quad \gamma = -2i, \quad \delta = -1; \tag{8.}$$

donc

$$S_0 = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Or d'après les équations (6.) et (1.) on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix}^{-1},$$

en désignant par S^{-1} la substitution inverse d'une substitution S, ou, en posant

$$e_1 f_2 - e_2 f_1 = \Delta,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\pi i f_1 f_2}{\Delta} & \frac{2\pi i f_1^2}{\Delta} \\ -\frac{2\pi i f_2^2}{\Delta} & 1 + \frac{2\pi i f_1 f_2}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

On en tire donc à l'aide des équations (8.):

$$\text{(9.)} \qquad \frac{\pi i f_1 f_2}{\Delta} = -1, \qquad \frac{\pi f_1^2}{\Delta} = -1, \qquad \frac{\pi f_2^2}{\Delta} = 1.$$

Mais comme une de ces équations est une conséquence des deux autres, elles ne présentent en effet que deux équations pour la détermination des quantités e_1, f_1, e_2, f_2. Deux autres équations découlent de la méthode suivante, par laquelle nous pourrons obtenir encore d'autres formules utiles pour ce mémoire.

On a (Voir p. e. mon mém. t. 66, p. 128 [1]))

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{du} & \eta_1 \\ \frac{d\eta_2}{du} & \eta_2 \end{vmatrix} = \frac{C}{u(u-1)},$$

où C est indépendant de u. Par conséquent

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{du}(u-1) & \eta_1(u-1) \\ \frac{d\eta_2}{du} & \eta_2 \end{vmatrix} = \frac{C}{u}.$$

2o] D'après les équations (B.) et (2.), η_2 et $\frac{d\eta_2}{du}$ ont des valeurs finies pour $u = 1$, savoir $\eta_2 = \pi$; en outre $\eta_1(u-1) = 0$ et $\frac{d\eta_1}{du}(u-1) = -1$ pour $u = 1$. Donc on a

$$C = -\pi,$$

1) Mém. VI, t. I de cette édition, p. 166. Sch.

et par conséquent:

$$\text{(D.)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{du} & \eta_1 \\ \frac{d\eta_2}{du} & \eta_2 \end{vmatrix} = \frac{-\pi}{u(u-1)}.$$

On a de même:

$$\begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ \frac{dv_{02}}{du} & v_{02} \end{vmatrix} = \frac{C'}{u(u-1)},$$

où C' est indépendant de u; donc

$$\begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ u\frac{dv_{02}}{du} & uv_{02} \end{vmatrix} = \frac{C'}{u-1}.$$

En posant $u = 0$, on trouve d'après les équations (1.)

$$C' = -1,$$

par conséquent

$$\text{(10.)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ \frac{dv_{02}}{du} & v_{02} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u(u-1)}.$$

Or on déduit des équations (6.)

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{du} & \eta_1 \\ \frac{d\eta_2}{du} & \eta_2 \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ \frac{dv_{02}}{du} & v_{02} \end{vmatrix},$$

par conséquent on conclut des équations (D.) et (10.)

$$\text{(11.)} \qquad \Delta = \pi.$$

Soit u une quantité réelle et positive inférieure à 1, et l'intégrale

$$\vartheta = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}$$

21] prise le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée; ϑ regardée comme fonction de u satisfait à l'équation différentielle (A.). Par un calcul analogue à celui que nous venons de faire pour la détermination de la limite de η_1 pour $u = 1$, on déduit

$$\lim \vartheta = -\pi, \quad \text{pour} \quad u = 1.$$

D'une manière semblable à celle que l'on a employée ci-dessus pour η_2 on trouve:

(12.) $$\vartheta = -\pi v_{11}.$$

De cette équation et des équations (B.), on conclut que ϑ représente, pour des valeurs réelles de u comprises entre 0 et 1, le prolongement de la fonction $-\eta_2$ telle qu'elle est définie par l'équation (B.) ou (C.). Donc on a

$$\lim \gamma_{12} = -\lim \vartheta, \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

Mais en posant

$$\vartheta = A_0 + B_0,$$

où

$$A_0 = \int_1^u \frac{1-\sqrt{1-y}}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}\,dy, \qquad B_0 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-u)}},$$

on a

$$\left.\begin{aligned} \lim A_0 &= -2\log 2, \\ \lim B_0 &= -2\log 2 + \lim \log u, \end{aligned}\right\} \text{(pour } u = 0).$$

Donc

$$\lim [\eta_2 + \log u] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

De la seconde des équations (6.) on déduit, en ayant égard aux équations (1.),

$$f_2 = 1, \quad e_2 = 0.$$

Par conséquent les équations (9.) et (11.) donnent les valeurs

$$e_1 = \pi, \quad f_1 = i, \quad e_2 = 0, \quad f_2 = 1.$$

On a donc:

(E.) $$\eta_1 = \pi v_{01} + i v_{02}; \quad \eta_2 = v_{02}.$$

Ces équations et les équations (1.) pourraient servir à déterminer l'expression de S_0, que l'on trouverait d'accord avec l'expression déjà donnée plus haut.

3.

Recherchons maintenant les diverses valeurs que les fonctions η_1, η_2 peuvent acquérir pour un point quelconque u, d'après les divers chemins que peut suivre la variable pour parvenir à ce point.

A cet effet on déduit aisément les équations [22

$$(1.) \qquad S_0^n = \begin{pmatrix} 3 & -2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -2ni \\ -2ni & -(2n-1) \end{pmatrix},$$

$$(2.) \qquad S_1^n = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -2ni \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour une valeur quelconque entière de n, en désignant toujours une substitution composée de plusieurs autres par des produits et des puissances des substitutions composantes.

Les substitutions S_0, S_1 et leurs puissances ont par conséquent la forme:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \lambda & \mu i \\ \nu i & \varrho \end{pmatrix},$$

où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels et entiers. Composons la substitution σ avec une substitution semblable σ':

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu' i \\ \nu' i & \varrho' \end{pmatrix},$$

où $\lambda', \mu', \nu', \varrho'$ représentent aussi des nombres entiers et réels; il en résulte la substitution

$$\sigma'' = \sigma\sigma' = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' - \mu\nu' & (\lambda\mu' + \mu\varrho')i \\ (\nu\lambda' + \varrho\nu')i & -\nu\mu' + \varrho\varrho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'' & \mu'' i \\ \nu'' i & \varrho'' \end{pmatrix}$$

de la même forme.

De là il suit que la substitution:

$$\Pi = S_0^k S_1^l S_0^{k_1} S_1^{l_1} S_0^{k_2} S_1^{l_2} \ldots,$$

où $k, l, k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots$ signifient des nombres réels et entiers positifs, négatifs ou nuls, a toujours la forme d'une substitution σ.

Comme un chemin quelconque de la variable u change les fonctions η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces fonctions dont les coefficients s'obtiennent par une substitution de la forme Π, il s'ensuit que toutes les valeurs dont η_1 et η_2 soient susceptibles pour le même point u, sont

représentées par les formules:

$$(F.) \qquad \lambda\eta_1 + \mu i\eta_2, \quad \nu i\eta_1 + \varrho\eta_2,$$

où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels entiers. Les déterminants des substitutions S_0 et S_1 étant égaux à l'unité, et le déterminant d'une substitution composée de plusieurs autres étant, comme l'on sait, égal au produit des déterminants des substitutions composantes, il en résulte que

$$(G.) \qquad \lambda\varrho + \mu\nu = 1.$$

23] 4.

D'après le no. précédent, le quotient

$$H = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{K'}{K}$$

prendra en un point quelconque u, pour les divers chemins par où la variable u y parvient, les valeurs contenues dans la forme:

$$(\alpha.) \qquad \frac{\nu i + \varrho H_0}{\lambda + \mu i H_0} = \frac{i}{\mu}\frac{1}{\lambda + \mu i H_0} - \frac{\varrho i}{\mu},$$

en désignant par H_0 une valeur quelconque parmi celles que H acquiert en u, et par $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ des nombres réels entiers qui satisfont à l'équation (G.).

Or d'après les équations (B.), (C.), (E.) et les équations (1.), (2.), (3.) du no. 2, on a

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} H_0 = -i, & \text{pour } u = 0, \\ H_0 = 0, & \text{pour } u = 1, \\ H_0 = \dfrac{4\log 2}{\pi} + \dfrac{1}{\pi}\lim\log u, & \text{pour } u = \infty, \end{cases}$$

c. à. d. que la partie réelle de H_0 est infinie et positive pour $u = \infty$.

Donc toutes les valeurs qu'acquiert H pour les points $u = 0, 1, \infty$, la variable u y parvenant par un chemin quelconque, sont représentées par les formules suivantes:

$$\text{pour } u = 0, \quad H = \frac{\nu - \varrho}{\lambda + \mu} i,$$

$$\text{pour } u = 1, \quad H = \frac{\nu}{\lambda} i,$$

$$\text{pour } u = \infty, \quad H = \text{ou à } \frac{-\varrho}{\mu} i,$$

ou à un nombre dont la partie réelle est infinie et positive, en désignant toujours par $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ des nombres réels entiers qui satisfont à l'équation (G.). Il faut remarquer que la seconde valeur que H peut avoir pour $u = \infty$ correspond à $\mu = 0$. Mais on a alors d'après l'équation (G.) $\lambda\varrho = 1$, ou, λ, ϱ étant des nombres entiers, $\lambda = \varrho = \pm 1$, c. à. d. $\frac{\varrho}{\lambda} = 1$. Portant dans ($\alpha$.) la valeur de H_0 donnée par (β.) pour $u = \infty$, et $\mu = 0$, on arrive à une valeur dont la partie réelle est infinie et positive.

Posons maintenant

$$q = e^{-\pi H};$$

les différentes valeurs qu'acquiert q pour $u = 0, 1, \infty$, la variable u ayant décrit pour parvenir à l'un de ces points un chemin quelconque, sont [24 données dans le tableau suivant:

$$\text{(H.)} \qquad \begin{cases} q = e^{-\pi\delta i}, & \text{pour } u = 0, \\ q = e^{-\pi\varepsilon i}, & \text{pour } u = 1, \\ q = \text{ou à } e^{-\pi\zeta i} \text{ ou à zéro}, & \text{pour } u = \infty, \end{cases}$$

où $\delta, \varepsilon, \zeta$ sont des nombres réels et rationnels. Donc:

A l'exception de la valeur $q = 0$ toutes les valeurs du tableau (H.) ont des modules égaux à l'unité.

5.

On déduit des équations (B.), (C.), (E.) et des équations (1.), (2.), (3.) du no. 2

$$\text{(1.)} \qquad H = \frac{H_0(u) - \log u}{\pi + i[H_0(u) - \log u]} \quad \text{dans le domaine de } u = 0,$$

$$\text{(2.)} \qquad H = \frac{\pi}{-H_1(u) - \log(u-1)} \quad \text{dans le domaine de } u = 1,$$

$$\text{(3.)} \qquad H = -\frac{1}{\pi} H_\infty(u) - \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{u} \quad \text{dans le domaine de } u = \infty.$$

Comme $H_0(u), -H_1(u), -H_\infty(u)$ dans le voisinage respectivement de $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ ne diffèrent que très-peu de la valeur $4 \log 2$, tandis que les parties réelles de $\log u$, $\log(u-1)$, $\log \frac{1}{u}$ dans le voisinage respectivement des mêmes points acquièrent des valeurs infinies négatives, on conclut que les parties réelles des valeurs de H données par les formules (1.), (2.),

(3.), sont positives dans trois parties du plan, dont l'une contient le point $u = 0$, l'autre le point $u = 1$ et la troisième le point $u = \infty$. Désignons ces parties du plan respectivement par f_0, f_1, f_∞.

Soit pour un chemin quelconque de u

$$H = \alpha + \beta i,$$

où α, β sont des quantités réelles; on a d'après le no. 4, formule (α.) la valeur suivante de H pour un autre chemin quelconque de u:

$$H = \frac{\nu i + \varrho(\alpha + \beta i)}{\lambda + \mu i(\alpha + \beta i)} = \frac{\alpha\varrho + (\beta\varrho + \nu)i}{\lambda - \mu\beta + \mu\alpha i}.$$

La partie réelle en est d'après l'équation (G.):

$$\frac{\alpha}{(\lambda - \mu\beta)^2 + \mu^2\alpha^2}.$$

Donc:

Le signe de la partie réelle de H est indépendant du chemin parcouru par la variable u.

25] En appliquant ce théorème aux valeurs de H pour les points de $f_0, f_1 f_\infty$, on trouve:

La partie réelle de H en un point quelconque de f_0, f_1, f_∞ est positive ou nulle, indépendamment du chemin qu'a parcouru u pour parvenir à ce point, ou bien:

Le module de q est égal ou inférieur à l'unité pour les points de f_0, f_1, f_∞, indépendamment du chemin de u.

6.

De l'équation (D.) résulte

$$\frac{dH}{du} = \frac{\pi}{u(u-1)\eta_1^2},$$

et par suite

$$\frac{dq}{du} = -\frac{\pi^2 q}{u(u-1)\eta_1^2}$$

ou

$$\text{(J.)} \qquad \frac{du}{dq} = -\frac{u(u-1)\eta_1^2}{\pi^2 q}.$$

On déduit des équations (C.) et (3.) no. 2 que dans le domaine de $u = \infty$

$$q = e^{\frac{v_{m2}}{v_{m1}}} = e^{H_\infty(u) + \log\frac{1}{u}};$$

donc on a

$$q = \frac{1}{16}\frac{1}{u} + \left(\frac{1}{u}\right)^3 f\left(\frac{1}{u}\right), \tag{1.}$$

où $f\left(\frac{1}{u}\right)$ représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{u}$ et convergente dans le domaine de $u = \infty$. Au moyen d'un théorème connu on tire de cette équation:

$$\frac{1}{u} = 16q + q^3\varphi(q), \tag{2.}$$

où $\varphi(q)$ représente une série ordonnée suivant les puissances entières et posisitives de q et convergente à l'intérieur d'un cercle décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon suffisamment petit.

En considérant dans l'équation différentielle (J.) q comme variable indépendante, cette équation a une intégrale $\frac{1}{u}$, s'évanouissant avec q et représentée par l'équation (2.) dans le voisinage de $q = 0$. D'après un théorème connu, (Voir le mém. de MM. Briot et Bouquet dans le Journal de l'École Polytechn. cah. 36, p. 138) cette intégrale reste holomorphe dans une partie du plan qui contient $q = 0$, tant que $\frac{du}{dq}$ a la même propriété par rapport à [26 q et u, ou bien lorsque l'on n'a point $q = \infty$ et que u n'acquiert aucune des valeurs 0, 1.

En outre, pour une valeur $q = q'$ finie, différente de zéro et non située sur la circonférence du cercle décrit autour de $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité, il n'est pas possible que u prenne une valeur u' différente de 0, 1, ∞ et pour laquelle η_1 soit égale à zéro. Car on aurait alors dans le voisinage de $u = u'$, $\eta_1 = (u-u')f(u)$, où $f(u)$ est holomorphe dans le même voisinage et ne s'évanouit pas pour $u = u'$; et l'on déduirait de l'équation (J.)

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{u-u'}\right) = \frac{u(u-1)f^2(u)}{\pi^2 q}.$$

Donc $\frac{1}{u-u'}$ serait dans le voisinage de $q = q'$ une fonction holomorphe de q et ne deviendrait pas infinie pour $q = q'$, contre l'hypothèse.

Mais pour la fonction u de q on a toujours l'équation:

$$q = e^{-\pi H}, \tag{3.}$$

et d'après le no. 4 pour $u = 0, 1$, le module de q est égal à l'unité; d'où l'on conclut immédiatement ce théorème:

I. Si l'on considère dans l'équation (3.) u comme fonction de q, cette fonction est holomorphe dans un cercle $\mathfrak{K}$ décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. En outre dans aucun point de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ la variable u n'acquiert une valeur qui fasse évanouir la fonction η_1.

L'équation (2.) définit la fonction u dans toute l'étendue du cercle $\mathfrak{K}$.

La définition des fonctions η_1, η_2 par des intégrales définies (Voir no. 1) fait voir que, pour des valeurs réelles et positives de u supérieures à l'unité, H sera réel et positif et ne s'annulera que pour $u = \infty$. Donc quand u parcourt l'axe réel dès l'infini jusqu'à l'unité, q partira de $q = 0$, décrira une courbe dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, enfin s'arrêtera en un point λ de la périphérie $\mathfrak{P}$ de ce cercle. Quand q, tout en partant de $q = 0$, décrit dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$ une courbe quelconque qui se termine à un point quelconque de $\mathfrak{P}$, on pourrait supposer que u, partant de $u = \infty$, parvînt à l'un des points $u = 0, 1$ ou n'y parvînt pas. Soit σ une partie finie de la courbe $\mathfrak{P}$, dont les points ne correspondent ainsi à aucun des points $u = 0, 1$ tandis qu'une extrémité μ de cet arc appartient à l'une des valeurs $u = 0, 1$; alors $\frac{du}{dq}$ est fini et déterminé le long de l'arc σ, et d'après le théorème déjà cité, (Voir 27] Briot et Bouquet l. c.), on pourrait, en traversant l'arc σ, continuer la fonction u de q à l'extérieur de $\mathfrak{K}$, et de cette manière u serait aussi pour tout point fini de cet extérieur une fonction holomorphe de q, puisque le module de q y est partout supérieur à l'unité, et par suite u différent de 0, 1. Donc tous les points de l'intérieur du cercle $\mathfrak{K}$ et les points à distance finie de son extérieur, qui communiquent les uns avec les autres par des chemins traversant l'arc σ, constituent ensemble un domaine du plan, dans lequel l'intégrale u de l'équation différentielle (J.), qui devient infinie pour $q = 0$, est holomorphe. Deux chemins de q qui joignent le point $q = 0$ au point μ, mais dont l'un est entièrement renfermé à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, tandis que l'autre

traverse d'abord la périphérie le long de σ et reste ensuite à l'extérieur de $\mathfrak{R}$, correspondent donc à deux chemins de u, qui mènent de $u = \infty$ jusqu'au même point $u = 0$, ou $u = 1$. Mais cela est impossible, car ce serait une contradiction avec le théorème énoncé à la fin du numéro précédent et d'après lequel aux valeurs de u dans le voisinage de l'un des points 0, 1, correspondent des valeurs de q, dont les modules sont inférieurs à l'unité.

Ayant démontré qu'il y a au moins un point λ de la périphérie $\mathfrak{P}$ jouissant de la propriété, qu'un chemin joignant $q = 0$ à $q = \lambda$ et restant dans l'intérieur de $\mathfrak{R}$, ramène la fonction de $u = \infty$ jusqu'à un des points $u = 0$, $u = 1$, on a ce théorème:

II. Si la variable q part de $q = 0$ et parcourt un rayon quelconque du cercle $\mathfrak{R}$, la fonction u part de $u = \infty$ et finit par arriver à l'un des points 0, 1 au moment où q atteint la périphérie $\mathfrak{P}$.

Si la variable u passe dans le plan des u de $u = \infty$ jusqu'à l'un des points $u = 0$, $u = 1$, la valeur correspondante de q partira de $q = 0$ et décrira un chemin entièrement contenu dans $\mathfrak{R}$ jusqu'à la périphérie $\mathfrak{P}$; car d'après le théorème II. q ne peut atteindre $\mathfrak{P}$ avant que u soit parvenu à l'un des points $u = 0$ ou $u = 1$. On peut donc énoncer ce théorème:

III. A chaque valeur finie ou infinie de u correspondent des valeurs de q, dont les modules sont inférieurs ou égaux à l'unité. Il est impossible d'étendre d'une manière continue, à travers la périphérie de $\mathfrak{R}$, l'intégrale u de l'équation différentielle (J.) qui devient infinie pour $q = 0$.

Le nombre de ces valeurs de q qui correspondent à la même valeur de u, est infini. L'une en étant $e^{-\pi H}$, les autres sont d'après le no. 4

$$e^{-\pi\left(\frac{\nu i+\varrho H}{\lambda+\mu i H}\right)},$$

où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels et entiers définis dans le no. 3.

Puisque, d'après le théorème I., toutes les dérivées de u envisagé [28 comme fonction de q, ainsi que la fonction u elle-même sont holomorphes à l'intérieur de $\mathfrak{R}$, on conclut de l'équation différentielle (J.):

IV. La fonction η_1^2 est aussi une fonction holomorphe de q à l'intérieur de $\mathfrak{R}$.

On parvient aussi au théorème suivant:

V. La fonction η_1 de q est différente de zéro pour toute valeur à l'intérieur de $\mathfrak{R}$, excepté pour le point $q = 0$; elle devient infinie pour tous les points de la périphérie.

En premier lieu pour tout point de l'intérieur de $\mathfrak{R}$, différent de $q = 0$, notre assertion se trouve déjà démontrée par le théorème I.

Soit maintenant q'' un point de la périphérie. D'après le théorème II. on devra faire correspondre à cette valeur l'un ou l'autre des points $u = 0$, $u = 1$; les équations (F.), (E.), (B.) montrent alors que η_1 est toujours infini. Il pourrait sembler que les cas où pour $u = 0$, $\lambda + \mu = 0$ et où pour $u = 1$, $\lambda = 0$, dussent faire exception. Mais comme $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ satisfont à l'équation (G.), on aurait dans le premier cas $\lambda = \mu = \pm 1$; par conséquent η_1 aurait dans le domaine de $u = 0$ la forme $\eta_1 = \pm \pi v_{01}$. Dans le second cas μ serait égal à ± 1, et par conséquent η_1 aurait dans le domaine de $u = 1$ la forme $\eta_1 = \pm \pi v_{11}$. Dans l'un et l'autre cas $\frac{u(u-1)\eta_1^2}{q}$ serait dans le voisinage de $q = q''$, $u = 0$ ou $u = 1$, une fonction holomorphe de u et de q, et par conséquent, d'après le théorème déjà cité, l'intégrale u de l'équation différentielle (J.), étendue d'une manière continue de l'intérieur de $\mathfrak{R}$ à l'intérieur d'un cercle entourant le point q'', resterait holomorphe dans ce cercle, et ainsi nous obtiendrions des valeurs de u, correspondant à des valeurs de q, dont les modules surpasseraient l'unité; ce qui est impossible d'après le théorème III.

Le théorème précédent peut aussi être énoncé comme il suit:

Va. La fonction η_1 de u ne s'évanouit que pour $u = \infty$ et devient infinie pour $u = 0$, $u = 1$, quel que soit le chemin parcouru par la variable u.

Du théorème V. on conclut aussi qu'il est impossible d'établir une extension par continuité de la fonction η_1 de q en passant de l'intérieur de $\mathfrak{R}$ à travers la périphérie à l'extérieur.

Dans l'équation

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{8}} = q^{\frac{1}{8}}[16 + q\varphi(q)]^{\frac{1}{8}}, \tag{4.}$$

29] qui est une conséquence de l'équation (2.), développons la seconde partie suivant les puissances entières et positives de q; on obtient pour un nombre

entier quelconque n une équation de la forme:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{n}} = 16^{\frac{1}{n}} q^{\frac{1}{n}} \psi_n(q), \tag{5.}$$

où $\psi_n(q)$ est une série qui ne s'évanouit pas pour $q = 0$ et qui est convergente dans toute l'étendue de $\mathfrak{R}$, parce que $\frac{1}{u}$ n'y devient ni zéro (excepté au point $q = 0$), ni infini (pour $u = 0$, mod $q = 1$, voir no. 4).

Posons $n = 8$, on a

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \psi_8(q), \tag{6.}$$

relation que l'on peut transformer dans l'équation connue:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)\,(1+q^3)\ldots} \tag{7.}$$

(JACOBI, Fundamenta p. 89[1]))*).

Le développement de η_1 suivant les puissances de q peut s'obtenir de deux manières: Dans l'expression de η_1 en u, contenue dans les équations (C.), on peut substituer la valeur de $\frac{1}{u}$ (de l'équation (2.)) et de $\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{8}}$ (de l'équation (5.), pour $n = 2$). Ou bien au moyen de l'équation (J.) on peut calculer les valeurs des dérivées successives de η_1^2 en fonctions de q, pour $q = 0$ et ensuite appliquer le théorème de MACLAURIN. De ce développement de η_1 et de celui de $u^{\frac{1}{4}}$ qui découle de l'équation (5.) pour $n = -2$, on conclut cette relation:

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_1 = \chi(q), \tag{8.}$$

où $\chi(q)$ signifie une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de q, convergente à l'intérieur de $\mathfrak{R}$, et telle que $\chi(0)$ est différente de zéro (Voir les équations (3.) du no. 2 et les équations (C.)).

*) M. HERMITE, qui a eu l'obligeance de lire les épreuves du présent mémoire, vient de me faire avec sa sagacité ordinaire la remarque suivante; »N'y aurait-il point lieu d'observer qu'en faisant $x^2 = f(H)$, il résulte de votre analyse que toutes les solutions de l'équation $f(H) = f(H_0)$ sont données par la formule $H = \frac{\nu i + \varrho H_0}{\lambda + \mu i H_0}$, en insistant sur l'extrême importance de ce résultat, pour la détermination des modules singuliers de M. KRONECKER, et en remarquant que les belles découvertes de l'illustre géomètre, sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, paraissent reposer essentiellement sur cette proposition, dont la démonstration n'avait pas encore été donnée?« F.

[1]) Jacobi, Werke, Bd. I (1880), p. 146. Sch.

3o] Extrayons encore la racine carrée du second membre de l'équation (8.), nous trouvons ainsi un développement convergent à l'intérieur de $\mathfrak{R}$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots \tag{9.}$$

qui est d'accord avec le développement connu (JACOBI, Fundamenta p. 184[1]).

7.

Soit

$$J = \int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \tag{1.}$$

les intégrales étant prises le long de l'axe réel des x, la racine carrée avec le signe positif, et k étant supposé réel et en valeur absolue inférieur à l'unité.

En employant la même substitution que dans le no. 1

$$x^2 = y, \quad k^2 = \frac{1}{u}$$

nous obtenons

$$J = \frac{1}{2\sqrt{u}} \int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \qquad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \int_1^u \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}, \tag{2.}$$

$\sqrt{u}$ étant positive, et les intégrales prises le long de l'axe réel des y avec le signe posisif de la racine carrée.

Posons

$$\zeta_1 = \int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \qquad \zeta_2 = \int_1^u \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}, \tag{3.}$$

où u se trouve être réel et supérieur à l'unité, et où les intégrales doivent être prises le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée. Nous avons alors:

$$J = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_1, \qquad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_2. \tag{4.}$$

Pour définir ζ_1, ζ_2 en fonction de la variable u sans restriction, nous les exprimons par les fonctions η_1, η_2.

En posant

$$y(y-1) = \psi(y), \quad y(y-1)(y-u) = \varphi(y),$$

1) Jacobi, Werke, Bd. I (1880), p. 235. Sch.

on a

$$(5.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} = -\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\frac{y}{\sqrt{\varphi(y)}} - \frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{\psi(y)}{y-u}}$$

et [31

$$(5a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} - \dfrac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right] - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{1}{\sqrt{u-y}} \\ \qquad = -\dfrac{\frac{1}{2}}{u-1}\dfrac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\dfrac{y}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} \\ \qquad\quad -\dfrac{1}{\psi(u)}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{\dfrac{\psi(y)}{u-y}} - \sqrt{\dfrac{\psi(u)}{u-y}} + \sqrt{\dfrac{u(u-y)}{u-1}}\right]. \end{cases}$$

En intégrant l'équation (5.) entre les limites $y = 0$ et $y = 1$, nous en tirons

$$(6.)\qquad \frac{d\eta_1}{du} = -\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\eta_1 + \frac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\zeta_1.$$

D'ailleurs on a

$$\eta_2 = \int_1^u \left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} - \frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]dy + \frac{2}{\sqrt{u}}.$$

Donc, puisque l'expression sous le signe d'intégration s'évanouit pour $y = u$,

$$\frac{d\eta_2}{du} = \int_1^u \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} - \frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]dy - u^{-\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, en intégrant l'équation (5a.) entre les limites $y = 1$ et $y = u$, le premier membre devient $\frac{d\eta_2}{du}$, et l'on obtient:

$$(6a.)\qquad \frac{d\eta_2}{du} = -\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\eta_2 + \frac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\zeta_2.$$

Des équations (6.) et (6a.) on déduit:

$$(K.)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = 2\psi(u)\dfrac{d\eta_1}{du} + u\eta_1, \\ \zeta_2 = 2\psi(u)\dfrac{d\eta_2}{du} + u\eta_2. \end{cases}$$

Remarquons en passant que les équations (K.) donnent immédiatement la relation connue de LEGENDRE. Car ayant multiplié la première par η_2, la seconde par η_1, retranchons l'une de l'autre; il en résulte au moyen de l'équation (D.)

$$\zeta_1\eta_2 - \zeta_2\eta_1 = -2\pi.$$

En y substituant les valeurs de $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ du no. 1 et de ce numéro, nous obtenons

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est effectivement l'équation de LEGENDRE.

32] En même temps on conclut du raisonnement précédent que cette équation de LEGENDRE subsiste pour les fonctions K, K', J, J' de u de même que pour des valeurs des périodes correspondant à une valeur fixe de u.

En outre les équations (K.) font voir que $q\zeta_1^2$, envisagée comme fonction de q, est holomorphe à l'intérieur du cercle $\mathfrak{K}$.

Car du no. 6 découle l'équation:

$$\frac{d\eta_1}{du}\psi(u) = -\frac{\pi^2 q}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dq}.$$

En y substituant pour η_1^2, $\frac{d\eta_1}{dq}$ les valeurs en fonction de q, tirées des équations (4.) et (8.) du numéro précédent, on obtient:

$$\frac{d\eta_1}{du}\psi(u) = q^{-\frac{1}{4}}F(q);$$

d'une manière analogue il vient:

$$u\eta_1 = q^{-\frac{1}{4}}F_1(q),$$

où $F(q), F_1(q)$ sont des fonctions de q holomorphes à l'intérieur de $\mathfrak{K}$. Ainsi notre assertion se trouve démontrée.

8.

Soit η une intégrale quelconque de l'équation (A.) et posons:

(1.) $$\zeta = 2\psi(u)\frac{d\eta}{du} + u\eta,$$

il s'ensuit

(2.) $$\frac{d\zeta}{du} = u\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta$$

et

(3.) $$2(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} = -(u+1)\frac{d\eta}{du} - \frac{1}{2}\eta.$$

L'élimination de η, $\frac{d\eta}{du}$ fournit:

(L.) $$2u(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2u\frac{d\zeta}{du} - \frac{1}{2}\zeta = 0.$$

(Cette équation peut se déduire directement par la méthode que j'ai donnée dans mon mém. t. 71, p. 91 [1]).

Les racines des équations fondamentales et déterminantes de cette équation différentielle sont

$$\text{pour } u = 0\colon\ 0, 1;\quad \text{pour } u = 1\colon\ 0, 0;\quad \text{pour } u = \infty\colon\ -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}.$$

Posons: [33

$$(4.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{01}}{du} + uv_{01} = w_{01}, \\ 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_0(u)v_{01}) + uH_0(u)v_{01} - 2(u-1)v_{01} = P_0(u)u^{-1}w_{01}, \\ P_0(u)u^{-1}w_{01} - w_{01}\log u = w_{02}; \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{11}}{du} + uv_{11} = w_{11}, \\ 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_1(u)v_{11}) + uH_1(u)v_{11} + 2uv_{11} = P_1(u)w_{11}, \\ P_1(u)w_{11} + w_{11}\log(u-1) = w_{12}; \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{\infty 1}}{du} + uv_{\infty 1} = w_{\infty 1}, \\ 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_\infty(u)v_{\infty 1}) + uH_\infty(u)v_{\infty 1} - 2(u-1)v_{\infty 1} = P_\infty(u)uw_{\infty 1}, \\ P_\infty(u)uw_{\infty 1} - w_{\infty 1}\log u = w_{\infty 2}. \end{cases}$$

Alors $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_\infty(u)$ sont des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives respectivement de u, $u-1$, $\frac{1}{u}$, et convergentes dans le domaine respectivement de $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, et l'on a

$$(7.)\qquad P_0(0) = 4,\quad P_1(1) = -4\log 2 + 2,\quad P_\infty(\infty) = -4.$$

Les systèmes fondamentaux d'intégrales de l'équation différentielle (L.), appartenant aux racines des équations fondamentales et déterminantes sont respectivement:

$$w_{01},\ w_{02};\quad w_{11},\ w_{12};\quad w_{\infty 1},\ w_{\infty 2};$$

et l'on conclut des équations (K.), (B.), (C.), (E.)

---

1) Mém. VIII, t. I de cette édition p. 241 et suiv. Sch.

$$(M.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = \pi w_{01} + i w_{02}, & \zeta_2 = w_{02}, & \text{dans le domaine de } u = 0, \\ \zeta_1 = -w_{12}, & \zeta_2 = \pi w_{11}, & \text{dans le domaine de } u = 1, \\ \zeta_1 = \pi w_{\infty 1}, & \zeta_2 = -w_{\infty 2}, & \text{dans le domaine de } u = \infty. \end{cases}$$

Il suit de là que:

$$(8.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = 2i, \quad \zeta_2 = 2, \quad \text{pour } u = 0, \\ \lim \zeta_1 = -2 + 4\log 2 - \lim \log(u-1), \quad \zeta_2 = \pi, \quad \text{pour } u = 1, \\ \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \infty, \quad \text{pour } u = \infty. \end{cases}$$

Posons

$$(9.)\qquad \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{J}{J'} = Z,$$

$$(10.)\qquad e^{-\pi Z} = s;$$

34] alors on a:

$$(11.)\quad \begin{cases} Z = i, \quad s = -1, \quad \text{pour } u = 0, \\ \text{la partie réelle de Z infinie et positive, } s = 0, \text{ pour } u = 1, \\ Z = 0, \quad s = 1, \quad \text{pour } u = \infty. \end{cases}$$

On conclut des équations (K.) que, u décrivant un contour fermé comprenant l'un des points: $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, ζ_1, ζ_2 se transforment en des fonctions linéaires et homogènes des mêmes quantités et dont les coefficients sont représentés resp. par S_0, S_1, S_∞.

Donc, si l'on désigne par Z_0 une des valeurs de Z pour une valeur quelconque de u, les valeurs résultant des divers chemins parcourus par u seront représentées par la formule:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\lambda + \mu i Z_0}{\nu i + \varrho Z_0}$$

(comparez la formule analogue (α.) du no. 4), où $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ sont des nombres réels et entiers caractérisés dans le no. 3, et en particulier toutes les valeurs de Z pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ sont contenues resp. dans les formules:

$$Z = -\frac{\lambda - \mu}{\nu + \varrho} i; \qquad Z = \text{ou à } + \frac{\mu i}{\varrho}$$

ou à un nombre dont la partie réelle est infinie et positive; $Z = -\frac{\lambda i}{\nu}$.

Ainsi toutes les valeurs de s, pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ ont des modules égaux à l'unité (excepté la valeur $s = 0$).

9.

On a d'après les formules (M.) et (4.), (5.), (6.) du numéro précédent:

(1.) $$Z = \frac{\pi}{P_0(u)u^{-1} - \log u} + i, \quad \text{dans le domaine de } u = 0,$$

(2.) $$Z = -\frac{1}{\pi}[P_1(u) + \log(u-1)], \quad \text{dans le domaine de } u = 1,$$

(3.) $$Z = -\frac{\pi}{P_\infty(u)u - \log u}, \quad \text{dans le domaine de } u = \infty.$$

Pour des valeurs de u très-voisines de $u = 0$, la partie réelle de $P_0(u)u^{-1} - \log u$ diffère très-peu de $\frac{4}{\varrho}\cos\varphi - \log\varrho$, où l'on a posé $\varrho e^{\varphi i}$ au lieu de u; partant son signe dépend de la valeur de $\cos\varphi$, et ainsi dans le voisinage de $u = 0$ la partie réelle de Z dépend aussi de la valeur de $\cos\varphi$.

Au contraire dans le voisinage de $u = 1$ le signe de la partie réelle [35 de Z est positif pour toute valeur de $\cos\varphi$, si l'on pose de même $u - 1 = \varrho e^{\varphi i}$.

Enfin dans le voisinage de $u = \infty$, le signe de la partie réelle de Z dépend de la valeur de $\cos\varphi$, en posant $u = \varrho e^{\varphi i}$.

Donc pour un point du voisinage de $u = 0$ et de $u = \infty$ le module de s pourra être tantôt plus grand, tantôt plus petit que l'unité, selon le chemin suivi par la variable u. Au contraire pour les points du voisinage de $u = 1$, le module de s est plus petit que l'unité quel que soit ce chemin.

10.

On déduit de l'équation différentielle (L.), ou aussi directement des équations (K.), au moyen de l'équation (D.):

(D'.) $$\begin{vmatrix} \frac{d\zeta_1}{du} & \zeta_1 \\ \frac{d\zeta_2}{du} & \zeta_2 \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{u-1};$$

de là

(1.) $$\frac{dZ}{du} = -\frac{\pi}{(u-1)\zeta_2^2},$$

donc

$$\frac{du}{ds} = \frac{(u-1)\zeta_3^2}{\pi^2 s}. \tag{J'.}$$

Il s'ensuit de l'équation (2.) du numéro précédent que dans le domaine de $u = 1$:

$$s = (u-1)e^{P_1(u)} = (u-1)g(u), \tag{2.}$$

où $g(u)$ est holomorphe dans le domaine de $u = 1$, et a la valeur $e^{-4\log 2+2}$ pour $u = 1$.

D'après le théorème cité dans le no. 6, cette équation conduit à:

$$u-1 = e^{4\log 2-2}s + s^2 h(s), \tag{3.}$$

où $h(s)$ est holomorphe dans le voisinage de $s = 0$.

Après cela le même raisonnement, par lequel nous sommes parvenu au théorème I. du no. 6, fournit ce théorème:

Quand on considère dans l'équation

$$s = e^{-\pi Z} \tag{4.}$$

u comme fonction de s, cette fonction est holomorphe dans un cercle $\mathfrak{L}$ décrit autour de $s = 0$ comme centre avec un rayon égal 36] à l'unité. En outre, dans aucun des points de l'intérieur de $\mathfrak{L}$, u n'acquiert une valeur pour laquelle la fonction ζ_3 s'évanouisse. L'équation (3.) exprime la fonction u dans toute l'étendue du cercle $\mathfrak{L}$.

Lorsque la variable u passe le long de l'axe réel de $u = 1$ jusqu'à $u = \infty$, il résulte des expressions de ζ_1 et ζ_3 par des intégrales définies (no. 7) que ces deux fonctions seront réelles et positives. La fonction Z est donc aussi réelle et positive pour les mêmes valeurs de u. Donc le chemin correspondant de s reste tout entier dans l'intérieur de $\mathfrak{L}$ et parvient à un point de la circonférence de ce cercle au moment où u devient infini. Par suite l'inverse doit aussi avoir lieu: il y a au moins un chemin de la variable indépendante s, lequel provient de l'intérieur de $\mathfrak{L}$ et tel qu'on parvient à $u = \infty$, lorsque s arrive à un point de la circonférence. Comme pour ce point $\frac{du}{ds}$ cesse d'être holomorphe, la série (3.) ne représente plus la fonction $u-1$ pour les points

de l'extérieur du cercle $\mathfrak{L}$; ou en d'autres termes: $\mathfrak{L}$ est le cercle de convergence de la série (3.).

De la même manière que dans le no. 5 à l'égard de la partie réelle de H, on démontre le théorème suivant:

Pour un point quelconque u le signe de la partie réelle de Z est indépendant des circulations que la variable u a faites autour des points $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, lorsqu'elle parvient à ce point.

Comme d'après le numéro précédent le module de s acquiert dans le voisinage de $u = 0$, $u = \infty$ des valeurs tantôt plus grandes, tantôt plus petites que l'unité, il s'ensuit que, quand u part de $u = 1$ et suit des chemins quelconques, aboutissant à $u = 0$ ou $u = \infty$, s partira de $s = 0$, traversera la circonférence de $\mathfrak{L}$ et continuera une partie de son chemin à l'extérieur de $\mathfrak{L}$. De là résulte le théorème:

La fonction $u-1$ de s, définie par l'équation (4.) et s'évanouissant pour $s = 0$, peut être étendue d'une manière continue pour la portion du plan extérieure à la circonférence de $\mathfrak{L}$. Les valeurs de u correspondant à des valeurs de s de l'intérieur de $\mathfrak{L}$ n'épuisent pas tout le plan de u.

Pour des valeurs finies de s, dont les modules surpassent l'unité, l'on parvient, parce que $\frac{du}{ds}$ est une fonction holomorphe de u et de s, d'une manière analogue à celle qui a conduit au théorème I. du no. 6, au théorème suivant:

Si l'on étend d'une manière continue la fonction u définie [37 par l'équation (4.) en franchissant la circonférence de $\mathfrak{L}$ et que l'on reste ensuite à l'extérieur de $\mathfrak{L}$, cette fonction est holomorphe dans une partie du plan comprise entre la circonférence du cercle $\mathfrak{L}$ et celle d'un cercle décrit autour du même centre avec un rayon quelconque et plus grand que l'unité.

Elle est donc développable dans toute cette étendue suivant les puissances entières, tant positives que négatives de s.

Heidelberg, novembre 1876.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 86, Zeile 15 } par continuité statt continuelle,
„ 87, „ 5 }
„ 92, „ 8 v. u. p. 128 statt p. 121,
„ 94, „ 10 le prolongement statt la continuation,
„ „, „ 8 v. u. la seconde des équations statt l'équation,
„ 96, „ 11 en statt dans,
„ „, „ 14 acquiert en statt acquiert dans,
„ „, „ 3 v. u. im Nenner $\lambda+\mu$ statt $\lambda-\mu$,
„ 97, „ 6 donnée par statt en,
„ „, „ 12 le tableau suivant statt la table suivante,
„ „, „ 17 du tableau statt de la table,
„ 98, „ 6, 7 la valeur suivante statt cette valeur,
„ 99, „ 13 v. u. tant que statt et où,
„ 100, „ 16 en statt dans,
„ 102, „ 16 $q = q''$ statt $q = q'$,
„ „, „ 6 v. u. par continuite statt continue,
„ 103, „ 5 au statt le,
„ 108, „ 12 v. u. l'un des statt les;
„ 97, „ 15 wurde »pour $u = \infty$«,
„ 99, „ 12 v. u. wurden die Worte »lorsque« und »que« eingeschaltet.

2) In seiner Abhandlung: Schreiben an Herrn BORCHARDT über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 83, 1877, S. 265 ff., bemerkt Herr DEDEKIND (a. a. O. S. 286) das Folgende: »Ich erlaube mir hier auf eine Stelle der Abhandlung von FUCHS aufmerksam zu machen, in welche, wie mir scheint, sich ein Irrthum eingeschlichen hat. Sind m, n relative Primzahlen, und nähert sich $\omega = x+yi$[1]) dem rationalen Werthe $\frac{m}{n}$ so an, dass x constant $= \frac{m}{n}$ bleibt, und y positiv unendlich klein wird, so nähert sich k[2]), wie aus dem Fragmente von RIEMANN[3]) oder auch aus

[1]) ω ist in der Bezeichnung der vorstehenden Abhandlung gleich Hi. Sch.

[2]) k ist in der Bezeichnung der vorstehenden Abhandlung gleich $\frac{1}{u}$. Sch.

[3]) Riemanns Werke (1892), S. 455 ff. Sch.

der obigen Theorie folgt, dem Werthe

$$k = \infty, \quad \text{wenn } m \equiv 1, \quad n \equiv 1, \quad \text{mod. } 2,$$
$$k = 1, \quad \text{„ } m \equiv 0, \quad n \equiv 1, \quad \text{„ },$$
$$k = 0, \quad \text{„ } m \equiv 1, \quad n \equiv 0, \quad \text{„ },$$

ist; wenn dagegen $\omega = x+yi$ sich auf dieselbe Weise einem irrationalen reellen Werthe x nähert, so ergiebt sich aus der obigen Theorie (vergl. den Schluss von § 2), dass k sich keinem bestimmten Werthe nähert, sondern unaufhörliche Schwankungen erleidet. Dies steht im Widerspruch mit dem Satze II. auf S. 27[1]) der genannten Abhandlung, in welchem behauptet wird, dass die Grösse u ($= k^{-1}$ nach meiner Bezeichnung) sich immer einem der beiden Werthe Null oder Eins annähern müsse, und mir scheint, als sei der Beweis dieser Behauptung gerechten Bedenken unterworfen, namentlich in dem Theile, welcher auf die Worte »ou n'y parvint pas« (S. 26[2])) folgt. Doch ist diese Abweichung von keiner wesentlichen Bedeutung für den Hauptgegenstand der sehr interessanten Abhandlung«.

An der von Herrn DEDEKIND bezeichneten Stelle der vorstehenden Abhandlung (S. 100, Zeile 14 v. u. bis S. 101, Zeile 10) ist nachgewiesen, dass jeder Bogen von endlicher Länge der Kreisperipherie $\mathfrak{P}$ Punkte enthalten muss, in denen u einen der Werthe 0, 1 anzunehmen vermag, d. h. dass diese Punkte — wie wir mit Benutzung der von Herrn G. CANTOR später (Mathematische Annalen, Bd. 15, 1879, S. 2) eingeführten Terminologie sagen können — auf $\mathfrak{P}$ überall dicht liegen. Die irrthümliche Ausdrucksweise des Theorems II. (S. 101), die sich auch auf die Erörterungen S. 102 und auf einige Stellen der Einleitung (S. 86, Zeilen 11, 13) übertragen hat, rührt also daher, dass FUCHS zwischen den Begriffen »überall dicht liegen« und »continuirlich erfüllen« nicht scharf genug unterschieden hat, was ja zum Theil auch auf den Mangel einer passenden Terminologie, zur Zeit der Abfassung dieser Abhandlung, zurückzuführen sein dürfte. Dass es sich in der That nur um einen ungenauen Ausdruck handelt, zeigen einerseits die Formeln (H.), S. 97, andererseits der Umstand, dass diese Ungenauigkeit, die sich übrigens durch leichte Änderungen des Textes beseitigen liesse, auf die Bündigkeit der weiteren Schlüsse, namentlich der Beweise der Theoreme III., Va, ohne Einfluss ist.

Die Abhandlung verdankt ihre Entstehung einer Anfrage von HERMITE. In einem: »Paris, 1. Juillet 1876« datirten Briefe an FUCHS, schreibt HERMITE: »Vous devez sans doute, au moyen des principes qui vous appartiennent, pouvoir démontrer qu'en posant

$$\frac{K'}{K} = \omega \quad \text{et:} \quad k = f(\omega)$$

k est une fonction uniforme de $\omega = x+yi$, dans toute l'étendue des valeurs positives de x, mais ce que je n'aperçois aucunement, et ce qui m'intéresserait beaucoup, ce serait de voir clairement à quoi il tient qu'en posant:

$$\frac{J'}{J} = x+yi$$

on cesse d'avoir une fonction à sens unique. Vos méthodes, je n'en doute pas, doivent immédiatement donner la raison de la différence de nature des fonctions définies par les deux équations«.

Nach Empfang des Manuscriptes der vorstehenden Arbeit schreibt HERMITE d. d. Paris, 27. Novembre 1876: »Mon cher ami, Vous venez de m'envoyer un beau et excellent travail; recevez mes remerciments et mes vives félicitations. Non seulement vous avez résolu ma question concernant la fonction inverse du rapport des fonctions complètes de second espêce $\frac{J'}{J}$, mais vous avez aussi à l'égard de $\frac{K'}{K}$

1) S. 101 dieses Bandes. Sch.

2) S. 100 dieses Bandes. Sch.

exposé une théorie approfondie que je juge pour la théorie des fonctions elliptiques de la plus grande importance. Le point vraiment fondamental que la partie réelle de H est essentiellement positive, j'avais vainement tenté de l'établir par une méthode élémentaire, pour ne pas être obligé de recourir aux principes nouveaux découverts par RIEMANN. Vous avez, mon cher ami, complètement réussi là où j'avais échoué, et votre méthode tirée des vrais principes de la question restera dans la science. C'est également un très important résultat que d'avoir fait résulter de ces mêmes principes que $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ sont des fonctions uniformes de q, et je ressens quelque satisfaction à vous avoir provoqué à tirer explicitement ces belles conséquences de vos théorèmes généraux sur les équations linéaires d'ordre quelconque«.

Auf den Gegenstand der vorstehenden Abhandlung ist der Verfasser später in der »Note zu der im Bande 83, p. 18 sqq. dieses Journals enthaltenen Arbeit: Sur quelques propriétés etc.; extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE«, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 112, 1893, S. 156—164, zurückgekommen. SCH.

XXV.

UBER DIE LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG, WELCHE ALGEBRAISCHE INTEGRALE BESITZEN.

Zweite Abhandlung.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85, 1878, S. 1—25.)

In meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 81, p. 97[1]) habe ich die Frage, [1 unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung algebraische Integrale besitze, auf die Frage zurückgeführt, wann gewisse aus der gegebenen eindeutig ableitbare lineare Differentialgleichungen, deren Ordnungszahl nicht grösser als zwölf, durch Wurzeln rationaler Functionen befriedigt werden. Zu diesem Behufe führte ich (das. S. 114[2]) den Begriff der Primform ein, und zeigte, dass der Grad der Primformen niedrigsten Grades in keinem Falle den zwölften überschreite. Zu den Zwecken meiner dortigen Abhandlung war eine Reduction der möglichen Gestalten dieser Primformen auf das geringste Mass nicht erforderlich. Ich beschränkte mich aus diesem Grunde daselbst auf diejenigen Reductionen dieser Formen, welche eine unmittelbare Folge des Begriffes derselben sind, und stellte dieselben in einer Tabelle (p. 126 das.[3]) zusammen.

Seitdem haben die Herren F. KLEIN und C. JORDAN sich mit demselben Gegenstande beschäftigt. Insbesondere hat Herr KLEIN in einer Reihe von Abhandlungen, welche theils in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, theils in den Mathematischen Annalen ent-

---

1) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.
2) S. 30 dieses Bandes. Sch.
3) S. 43 dieses Bandes. Sch.

halten sind, die Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen, zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht, und meine oben genannte Tabelle einer Reduction unterworfen.

In neuerer Zeit ist es auch Herrn GORDAN gelungen (Mathem. Ann. Bd. 12, p. 147) die von mir in der Einleitung zu meiner oben genannten Abhandlung aufgestellte Aufgabe, die Formen n^{ten} Grades zu bestimmen, deren Covarianten niedrigeren als n^{ten} Grades identisch verschwinden, für binäre Formen zu lösen, und zu zeigen, dass dieselben mit meinen Primformen niedrigsten Grades zusammenfallen.

2] Bei Gelegenheit einer Note des Herrn P. PEPIN (Comptes rendus de l'Acad. des sc. de Paris, Juni 1876) habe ich (das. Juli 1876 [1]) nachgewiesen, dass der Grad zwölf von den Primformen niedrigsten Grades auch wirklich erreicht wird.

In dem Folgenden erlaube ich mir zu zeigen, wie eine consequente Ausführung der Theorie der Primformen, bei welcher nicht bloss diejenigen niedrigsten Grades, sondern die Gesammtheit derselben in Betracht gezogen wird, die natürliche Grundlage für alle auf die hier betrachteten Differentialgleichungen bezüglichen Fragen bildet. Es wird gezeigt, wie durch dieselbe nicht blos die in meiner oben genannten Abhandlung gefundenen Resultate auf die einfachste Weise erhalten werden, sondern auch die endgültig möglichen Gestalten der Primformen niedrigsten Grades sich von selbst ergeben, und neue Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen, denen die Wurzeln algebraischer Gleichungen genügen, so wie die Form dieser Gleichungen erkannt werden.

Meine Abhandlung (Bd. 81, p. 97 [2]) erlaube ich mir im Folgenden, der häufig vorkommenden Citate wegen, zur Abkürzung mit A. zu bezeichnen.

1.

I. Der Grad m einer irreductiblen algebraischen Gleichung, deren Wurzeln einer Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py \quad \text{(Gl. (B.) in A. p. 102 [3])}$$

genügen, ist eine gerade Zahl.

[1]) Abh. XXII, S. 67 ff. dieses Bandes. Sch.
[2]) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.
[3]) S. 17 dieses Bandes. Sch.

Ist nämlich L' der Index des zu der HESSEschen Covariante einer Primform niedrigsten Grades N gehörigen reducirten Wurzelsystems, so besteht (A. p. 118[1]) die Gleichung:

$$m = (2N-4)L',$$

woraus sich unsere Behauptung ergiebt.

II. Der Grad einer beliebigen Primform, ebenso wie der Index des zugehörigen reducirten Wurzelsystems ist ein Divisor des zur Differentialgleichung gehörigen Grades m.

In der That sei n der Grad einer beliebigen Primform und l der Index des zugehörigen reducirten Wurzelsystemes, so ist (A. p. 113[2])

$$m = nl.$$

III. Es sei y_1, y_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Inte- [3 gralen, c_1, c_2 willkürliche Constanten, so ist die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung, welcher $c_1y_1+c_2y_2$ genügt, m oder $\frac{m}{2}$.

Sind nämlich unter den Wurzeln der Gleichung, welcher $c_1y_1+c_2y_2$ genügt, zwei solche, deren Quotient gleich einer Einheitswurzel j, so ist (nach dem Satze A. p. 112[3]) $j(c_1y_1+c_2y_2)$ eine Wurzel derselben Gleichung. Da diese Gleichung irreductibel ist, so geht auf einem gewissen Wege $c_1y_1+c_2y_2$ in $j(c_1y_1+c_2y_2)$ über. Es mögen nun auf demselben Wege y_1, y_2 resp. in $\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2$, $\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2$ übergehen, so folgt:

$$(1.) \qquad \begin{cases} c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{21} = jc_1, \\ c_1\alpha_{12}+c_2\alpha_{22} = jc_2. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen für beliebige Werthe von c_1, c_2 bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{22} = j, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Da aber (A. p. 105[4]) $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} = 1$, so müsste $j^2 = 1$, d. h. wegen der

[1]) S. 34 dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 29 dieses Bandes. Sch.
[3]) S. 27 dieses Bandes. Sch.
[4]) S. 19 dieses Bandes. Sch.

Irreductibilität der Gleichung, welcher $c_1 y_1 + c_2 y_2$ genügt:

(3.) $$j = -1$$

sein. Es ist demnach der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung entweder 1 oder 2, d. h. die Anzahl der Glieder des Systems m oder $\frac{m}{2}$.

Diese Anzahl stellt zu gleicher Zeit den grösstmöglichen Grad einer Primform dar, wir wollen diesen mit μ bezeichnen.

Die verschiedenen Werthe, welche y_1, y_2 annehmen können, sind in der Form $\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2$, $\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2$ enthalten. Sind γ_1, γ_2 bestimmte Constanten, so kann man auf unzählig viele verschiedene Arten c_1, c_2 so wählen, dass die Gleichungen (1.) nur für die Werthe (2.) und (3.) bestehen können, und dass die den verschiedenen Werthen von y_1, y_2 entsprechenden Gleichungen:

$$c_1 \alpha_{11} + c_2 \alpha_{21} = \gamma_1,$$
$$c_1 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{22} = \gamma_2$$

nicht erfüllt werden. Die Primform μ^{ten} Grades, von der $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ein Linearfactor ist, ist alsdann nicht durch $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$ theilbar. Hieraus ergiebt sich,
4] wenn wir, wie im Folgenden immer, Formen als identisch oder von einander verschieden bezeichnen, je nachdem sie bis auf einen constanten Factor gleich sind oder nicht:

IV. Der höchste Grad μ einer Primform ist m oder $\frac{m}{2}$, und es giebt unzählig viele von einander verschiedene Primformen dieses höchsten Grades.

2.

I. Ist f eine Primform niedrigsten Grades N, $H(f)$ ihre Hessesche Covariante, $H^2(f)$ die Hessesche Covariante von $H(f)$, so ist eine Gleichung

$$H(f)^3 = \gamma f^2 H^2(f) \quad (\gamma \text{ constant})$$

nicht möglich.

Denn f und $H(f)$ als Primformen können einen gemeinschaftlichen linearen Factor nur haben, wenn sie identisch sind (A. p. 114[1]), Satz IV.); hierzu wäre aber erforderlich, dass

$$2N - 4 = N, \text{ d. h. } N = 4.$$

[1]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Ist N von 4 verschieden, so müsste demnach, wenn die obige Gleichung stattfände, $H^2(f)$ durch $H(f)^3$ theilbar sein, dieses ist aber nicht möglich, da der Grad der letzteren Form höher ist als der der ersteren.

Ist $N = 4$, so wähle man ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von der Beschaffenheit, dass y_2 ein Factor von f ist, alsdann hat f die Form

$$f = 4a_1 y_1^3 y_2 + 6a_2 y_1^2 y_2^2 + 4a_3 y_1 y_2^3 + a_4 y_2^4.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$H(f) = -12^2 a_1^2 y_1^4 + \cdots$$

Da nun a_1 nicht verschwinden darf, weil f als Primform nicht durch y_2^2 theilbar ist, so folgt, dass $H(f)$ nicht durch y_2 theilbar, also von f verschieden ist. Demnach ist der Satz auch für diesen Fall bewiesen.

Es sei nun F eine Primform μ^{ten} Grades, welche mit keiner der Formen f, $H(f)$, $H^2(f)$ einen gemeinschaftlichen Linearfactor hat — nach S. IV. voriger No. giebt es unzählig viele derartige Formen — so kann man nach S. I. eine Constante λ so bestimmen, dass

$$\varphi = H(f)^3 - \lambda f^2 H^2(f)$$

durch einen Linearfactor von F theilbar wird, ohne dass φ identisch verschwindet.

Da $H(f)$, $H^2(f)$ homogene Functionen der Coefficienten von f, resp. des zweiten und vierten Grades sind, so bleibt der Quotient $\frac{f^2 H^2(f)}{H(f)^3}$ unverändert, [5 wenn f in jf übergeht. Dieser Quotient bleibt also für jeden Weg der Variabeln z unverändert, er ist also eine rationale Function von z. Hieraus ergiebt sich aber, dass φ gleich der Wurzel einer rationalen Function und (nach A. p. 115[1]), S. VI.) durch F theilbar ist. Man erhält daher den Satz:

II. Ist μ der höchste und N der niedrigste Grad einer Primform, so muss

$$\mu \leqq 6N - 12$$

sein.

Es sei L der Index eines reducirten Wurzelsystems von der kleinsten Anzahl N, so ist (A. p. 115[1]))

$$m = NL.$$

[1]) S. 31 dieses Bandes. Sch.

Es ist demnach nach S. II. dieser Nummer und S. IV. voriger Nummer

1) entweder

$$NL \leqq 6N-12, \quad (\mu = m),$$

2) oder

$$NL \leqq 12N-24, \quad \left(\mu = \frac{m}{2}\right),$$

also

III. Je nachdem $\mu = m$ oder $\mu = \frac{m}{2}$, ist $L < 6$ oder $L < 12$.

Dieses ist der Fundamentalsatz unserer Abhandlung in Bd. 81 dieses Journals (p. 122[1]) daselbst).

Die gegenwärtige von der dortigen verschiedene Herleitung desselben zeichnet sich vor jener dadurch aus, dass sie ohne Anwendung anderer Hülfsmittel als der Entwickelung des Primformenbegriffs sich ergiebt.

IV. Ist eine Form g gleich der Wurzel einer rationalen Function, so sind

$$\frac{H(g)}{g^2} \quad \text{und} \quad \frac{H'(g)}{g^4}$$

rationale Functionen.

Da nämlich die verschiedenen Werthe, welche g annimmt, die Form jg haben, wo j eine Einheitswurzel bedeutet, so sind die verschiedenen Werthe von $H(g)$, $H'(g)$ resp. der Form $j^2H(g)$, $j^4H'(g)$ (A. p. 106[2]), woraus die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

V. Der Index des reducirten Wurzelsystems einer beliebigen irreductiblen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, ist eine gerade Zahl.

Zunächst ist ersichtlich, dass der Index eines jeden reducirten Wurzelsystems eine gerade Zahl ist, wenn dieses für ein einziges System feststeht.

6] Denn es gehöre ein Integral y_1 zu einem beliebigen Wurzelsystem, dessen Index $2l$ eine gerade Zahl ist, und es werde eine primitive $2l^{te}$ Wurzel der Einheit mit j bezeichnet. Es giebt alsdann (A. p. 108 und 109[3])) ein zweites Integral y_2, welches mit y_1 ein Fundamentalsystem bildet und nach Vollziehung desselben Umlaufes, auf welchem y_1 in $y_1 j$ übergeht, sich in $y_2 j^{-1}$ verwandelt.

---

[1]) S. 39 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 21 dieses Bandes. Sch.

[3]) S. 32, 24 dieses Bandes. Sch.

Eine l-malige Wiederholung desselben Umlaufes führt aber y_1 und y_2 gleichzeitig resp. in $-y_1$ und $-y_2$ über. Auf demselben Wege muss demnach jedes Integral, als lineare homogene Function von y_1, y_2 seinen entgegengesetzten Werth erhalten. Eine irreductible Gleichung muss aber die sämmtlichen Werthe, die eine Wurzel derselben annimmt, als Wurzeln enthalten. Hieraus folgt, dass wenn die Wurzeln irgend einer irreductiblen Gleichung der Differentialgleichung genügen, dieselben zu je zweien einander gleich und entgegengesetzt sind, d. h. dass der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung eine gerade Zahl ist (A. p. 113[1]).

Ist n die Anzahl der Glieder eines reducirten Wurzelsystems, l der Index desselben, so ergiebt die Gleichung $m = nl$ nach S. I. No. 1, dass, wenn eine der beiden Zahlen n, l ungerade, die andere gerade sein müsse. Wenn demnach l für jedes reducirte Wurzelsystem eine ungerade Zahl wäre, so müsste der Grad jeder Primform, also (nach A. p. 115[2], S. V.) der Grad jeder Form, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, eine gerade Zahl sein. In der Gleichung, welcher das reducirte Wurzelsystem mit dem Index l genügt, sind (A. p. 99[3]) die Exponenten der Unbekannten y durch l theilbar. Der Coefficient a_{m-li} von y^{m-li} ist eine rationale Function von z und durch eine Form li^{ten} Grades darstellbar. Demnach ist $a_{m-li} = 0$, wenn nicht i eine gerade Zahl. Die Gleichung enthielte also nur solche Potenzen von y, deren Exponenten durch $2l$ theilbar wären, d. h. (A. p. 111[4]) der Index des reducirten Wurzelsystems wäre nicht l sondern $2l$.

Demnach muss mindestens ein reducirtes Wurzelsystem, folglich nach dem eben bewiesenen Hülfssatz jedes reducirte Wurzelsystem einen geradzahligen Index besitzen.

3.

Aus der Gleichung

$$m = NL = (2N-4)L' \tag{1.}$$

folgt, dass $\frac{LN}{2N-4}$ eine ganze Zahl ist. Setzen wir

$$\frac{2L}{N-2} = \varrho, \tag{2.}$$

[7

1) S. 28 dieses Bandes. Sch.
2) S. 30 dieses Bandes. Sch.
3) S. 14 dieses Bandes. Sch.
4) S. 27 dieses Bandes. Sch.

so ist

$$\frac{LN}{2N-4} = L' = \frac{1}{2}(L+\varrho). \tag{3.}$$

Demnach ist ϱ eine ganze Zahl.

Nach Satz V. voriger No. ist L' eine gerade Zahl, also

$$L+\varrho \equiv 0, \mod 4. \tag{4.}$$

Da nach S. III. und S. V. voriger No. L eine gerade Zahl und kleiner als 12 ist, so ergiebt die Bedingung, dass ϱ eine ganze Zahl ist, welche der Congruenz (4.) genügt,

für $N>4$

folgende Combinationen

$$L = 6, \quad N = 8$$
$$L = 8, \quad N = 6$$
$$L = 10, \quad N = 12.$$

Die Combination $L = 6$, $N = 8$ liefert

$$m = 48$$

und nach S. III. voriger No.

$$\mu = 24.$$

Nach S. II. No. 1 wäre demnach der Grad einer beliebigen Primform im gegenwärtigen Falle eine der Zahlen 8, 12, 24, also stets durch 4 theilbar. Da jede Form $\varphi(y_1, y_2)$, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function, (A. p. 115[1]) sich in ein Produkt von Primformen zerlegen lässt, so ist der Grad derselben durch 4 theilbar.

Es sei nunmehr y ein Linearfactor einer Primform f achten Grades, so genügt y einer Gleichung 48ten Grades, in welcher die Exponenten der Potenzen der Unbekannten durch 6 theilbar sind, weil der Index des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung gleich 6 angenommen worden. Da sich aber andererseits die Coefficienten der Potenzen der Unbekannten als ganze homogene Functionen $\varphi(y_1, y_2)$ von y_1, y_2 darstellen lassen und diese rationale Functionen von z sind, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass nur die Coefficienten derjenigen Potenzen von Null verschieden sein können, deren

[1]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Exponenten durch 4 theilbar sind. Demnach genügt y einer Gleichung 48ten Grades, in welcher die Exponenten der Potenzen der Unbekannten durch [s 12 theilbar sind. Da aber die Anzahl der Glieder des reducirten Wurzelsystems dieser Gleichung gleich 4 wäre, so ergäbe sich, dass schon eine Form vierten Grades gleich der Wurzel einer rationalen Function wäre, gegen die Voraussetzung.

Demnach ist die Combination $L = 6$, $N = 8$ auszuschliessen. Es verbleiben demnach für $N > 4$ die Combinationen

$$(5.) \qquad \begin{cases} L = 8, & N = 6; \\ L = 10, & N = 12. \end{cases}$$

4.

Für die Combination $L = 8$, $N = 6$ hat eine Primform niedrigsten Grades (A. p. 125[1]) die Gestalt

$$f = a_1 y_1^5 y_2 + a_6 y_1 y_2^5,$$

wo y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen ist, welche auf demselben Wege resp. in $y_1 j, y_2 j^{-1}$ übergehen, wenn j eine primitive achte Wurzel der Einheit bedeutet. (A. p. 123[2].)

Da y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden können, so ist

$$\text{für } L = 8, \quad N = 6$$

$$(1.) \qquad f_6 = y_1^5 y_2 + y_1 y_2^5$$

eine Primform niedrigsten Grades.

Für die Combination $L = 10$, $N = 12$ hat die Primform niedrigsten Grades (A. p. 125[1]) die Form

$$f = a_1 y_1^{11} y_2 + a_6 y_1^6 y_2^6 + a_{11} y_1 y_2^{11},$$

wo y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen bilden, welche auf demselben Wege resp. in $y_1 j, y_2 j^{-1}$ übergehen, wenn j eine primitive zehnte Wurzel der Einheit ist.

Damit die Covariante

$$\frac{\partial^6 f}{\partial y_1^6} \frac{\partial^6 f}{\partial y_2^6} - 8 \frac{\partial^6 f}{\partial y_1^5 \partial y_2} \frac{\partial^6 f}{\partial y_1 \partial y_2^5} + \cdots$$

1) S. 42 dieses Bandes. Sch.

2) S. 40 dieses Bandes. Sch.

als Form achten Grades (s. A. p. 98[1])) identisch verschwinde, ist erforderlich, dass

$$a_6^2 + 11^2 a_1 a_{11} = 0.$$

Da überdiess y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden können, so ist für

9] $$L = 10, \quad N = 12$$

(2.) $$f_{12} = y_1^{11} y_2 + 11 y_1^6 y_2^6 - y_1 y_2^{11}$$

eine Primform niedrigsten Grades*).

Die Formen (1.) und (2.) besitzen die Eigenschaft:

(3.) $$H^2(f_6) = \text{Const.} f_6^2,$$

(4.) $$H^2(f_{12}) = \text{Const.} f_{12}^2.$$

5.

Ist $N > 4$, so ist nach Gleichung (5.) No. 3, $L = 8$ oder 10, also nach S. III. No. 2, $\mu = \frac{m}{2}$. Man hat demnach

a) für die Combination $L = 8$, $N = 6$, $m = 48$, $\mu = 24$,

b) für die Combination $L = 10$, $N = 12$, $m = 120$, $\mu = 60$.

Im Falle a) könnte demnach nach S. II. No. 1 der Grad n einer Primform nur eine der Zahlen $n = 6, 8, 12, 16, 24$ sein. Da aber nach S. V. No. 2 das zu jedem n gehörige l eine gerade Zahl sein muss, so ist $n = 16$ auszuschliessen, dessen zugehöriges l den Werth 3 hätte.

Im Falle b) kann der Grad einer Primform nur durch eine der Zahlen $n = 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60$ dargestellt werden. Hiervon sind die Zahlen $n = 24$, $n = 40$ auszuschliessen, weil denselben resp. die ungeradzahligen Werthe $l = 5$, $l = 3$ entsprechen würden. Gäbe es eine Primform φ vom 15ten Grade, so wäre $H(\varphi)$ vom Grade 26. Diese Form müsste (nach A. p. 115[3])) sich in ein Product von Primformen niedrigeren als 26sten Grade zerlegen lassen, was nicht möglich ist.

*) Diese beiden Formen (1.) und (2.) stimmen bis auf constante Factoren mit denjenigen überein, auf welche Herr KLEIN die Tabelle in meiner Abhandlung p. 126[2]) reducirt hat.

1) S. 12 dieses Bandes. Sch.

2) S. 43 dieses Bandes. Sch.

3) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Man erhält also den Satz:

Für $N = 6$, $L = 8$ ist der Grad einer Primform durch eine der Zahlen 6, 8, 12, 24; für $N = 12$, $L = 10$ durch eine der Zahlen 12, 20, 30, 60 bestimmt.

6.

Es seien ψ und χ zwei beliebige Formen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems, so folgt aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}y_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}y_2 = n\psi, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial y_1}y_1+\frac{\partial\chi}{\partial y_2}y_2 = n\chi, \qquad [10$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}y_2' = \psi', \qquad \frac{\partial\chi}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\chi}{\partial y_2}y_2' = \chi',$$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dz}, \qquad y_2' = \frac{dy_2}{dz}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dz}, \qquad \chi' = \frac{d\chi}{dz},$$

und unter Berücksichtigung von A. p. 104[1]) Gl. (2.)

$$\chi\frac{\partial\psi}{\partial y_1}-\psi\frac{\partial\chi}{\partial y_1} = Cy_2(\chi\psi'-\chi'\psi), \tag{1.}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch y_2 theilbar.

Sind ψ und χ Wurzeln rationaler Functionen, so ist auch $\chi\psi'-\chi'\psi$ Wurzel einer rationalen Function. Man erhält demnach den Satz:

I. Sind ψ und χ Formen desselben Grades und jede gleich der Wurzel einer rationalen Function, so ist auch die Form

$$G(\psi,\chi) = \frac{1}{y_2}\left(\chi\frac{\partial\psi}{\partial y_1}-\psi\frac{\partial\chi}{\partial y_1}\right)$$

gleich der Wurzel einer rationalen Function.

Ist das eine Glied y_1 des Fundamentalsystems y_1, y_2 Linearfactor einer Primform f niedrigsten Grades N und $y_2 = y_1^{L-1}\psi(y_1^L)$ (s. A. p. 123[2])), so ist eine beliebige von f verschiedene Primform φ nicht durch y_1 theilbar (A. p. 114[3]) S. IV.), dieselbe enthält demnach das von y_1 unabhängige Glied.

---

1) S. 19 dieses Bandes. Sch.
2) S. 40 dieses Bandes. Sch.
3) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Hieraus folgt aber wie in A. p. 123[1]) Gl. (4.) No. 18, dass φ die Form hat

$$\varphi = y_1^{\frac{1}{2}L}\varphi_1 + a_n y_2^n, \tag{2.}$$

wo n den Grad von φ, und φ_1 eine Form $(n-\frac{1}{2}L)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet.

Es seien nunmehr ψ und χ zwei Primformen n^{ten} Grades, welche sowohl unter einander als auch von f verschieden sind, so ist $\chi\psi'-\chi'\psi$, also auch die Form $G(\psi,\chi)$ von Null verschieden. Nach S. I. ist dieselbe gleich der Wurzel einer rationalen Function, nach Gleichung (2.) ist sie durch $y_1^{\frac{1}{2}L-1}$ theilbar, folglich ist diese Form (A. p. 115[2]) S. VI.) durch $f^{\frac{1}{2}L-1}$ theilbar. Der Quotient ist entweder eine Constante oder, als Wurzel einer rationalen Function, mindestens vom N^{ten} Grade. Es ist also entweder

$$n = \tfrac{1}{4}NL - \tfrac{1}{2}N + 1 \tag{3.}$$

oder

$$n \geqq \tfrac{1}{4}NL + 1. \tag{3a.}$$

Für den Fall

$$N = 6, \quad L = 8 \tag{a.}$$

11] wäre demnach entweder

$$n = 10 \quad \text{oder} \quad n \geqq 13.$$

Für den Fall

$$N = 12, \quad L = 10 \tag{b.}$$

wäre entweder

$$n = 25 \quad \text{oder} \quad n \geqq 31.$$

Nach dem Satze voriger Nummer giebt es also für den Fall (a.) nur je eine Primform 8ten und 12ten Grades, für den Fall (b.) nur je eine des 20sten und 30sten Grades.

Es giebt aber überdies ausser f nicht noch eine Primform f' N^{ten} Grades, da sonst nach S. I. $G(f,f')$ eine Form $(2N-2)^{\text{ten}}$ Grades wäre, welche gleich der Wurzel einer rationalen Function. Aber für $N=6$ giebt es keine solche Form 10ten, und für $N=12$ keine solche 22sten Grades, weil diese weder Primformen sind noch sich in Producte aus den Primformen verwandeln lassen.

---

[1]) S. 40 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 31 dieses Bandes. Sch.

Man erhält also den Satz:

II. Ist $n < \mu$, so giebt es nicht zwei verschiedene Primformen n^{ten} Grades.

7.

I. Das Quadrat der Primform f_6 und die Primform $H(f_6)$ sind rationale Functionen von z.

Nach S. IV. No. 2 ist nämlich $\frac{H^2(f_6)}{f_6^4}$ rational. Nach No. 4 Gl. (3.) ist $H^2(f_6) = \text{Const.}\, f_6^2$, woraus sich ergiebt, dass f_6^2, also auch nach S. IV. No. 2 $H(f_6)$ rational ist.

Bezeichnen wir mit $\overline{H}(f_6)$ die von ihrem numerischen Factor befreite Hessesche Covariante von f_6, so ist

$$\overline{H}(f_6) = y_1^6 - 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^6. \tag{1.}$$

Damit die Form

$$\psi = \overline{H}(f_6)^3 + \lambda f_6^4 \quad (\lambda \text{ constant}) \tag{2.}$$

durch das Quadrat eines Ausdruckes $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ theilbar werde, muss der letztere Ausdruck ein Linearfactor der Form:

$$4\overline{H}(f_6)\frac{\partial f_6}{\partial y_1} - 3 f_6 \frac{\partial \overline{H}(f_6)}{\partial y_1}$$

d. h. der Form

$$\varphi_{12} = (y_1^4 - y_2^4)(y_1^6 + 34 y_1^4 y_2^4 + y_2^6) \tag{3.}$$

sein.

Ist $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ ein Linearfactor von φ_{12} und wird λ so bestimmt, dass $[_{12}\ \psi$ durch $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^3$ theilbar wird, so ist (A. p. 115[1]) S. VI.) ψ durch das Quadrat derjenigen Primform theilbar, wovon $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ ein Linearfactor ist, da ψ nach S. I. eine rationale Function von z ist. Demnach müssen sämmtliche Linearfactoren von χ, also χ selber, Factoren von φ_{12} sein. Die Primform χ ist aber von f_6 verschieden, weil φ_{12} nicht durch y_1 theilbar ist, und von $H(f_6)$ verschieden, weil sonst χ auch Divisor von f_6 sein müsste (nach Gl. (2.)). Die Primform χ ist also 12ten Grades, und demnach mit φ_{12} identisch.

Es ist also $\psi = \varphi_{12}^2$. Setzt man diesen Werth in Gl. (2.) und bestimmt die Constante λ durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten, so

[1]) S. 31 dieses Bandes. Sch.

erhält man

$$\varphi_{12}^2 = \overline{H}(f_6)^3 + 108 f_6^4. \tag{4.}$$

II. Es ist also φ_{12} die Primform 12ten Grades und ihr Quadrat eine rationale Function von z.

III. Die Primform f_{12} und die Primform $H(f_{12})$ sind rationale Functionen von z.

In der That ist (Gl. (4.) No. 4) $H^3(f_{12}) = \text{Const.}\, f_{12}^3$, und nach S. IV. No. 2 $\frac{H^3(f_{12})}{f_{12}^4}$ rational, also auch f_{12}, und nach demselben Satze $H(f_{12})$ eine rationale Function.

Bezeichnen wir wieder mit $\overline{H}(f_{12})$ die vom numerischen Factor befreite Form $H(f_{12})$, so ist

$$\overline{H}(f_{12}) = y_1^{20} - 228 y_1^{15} y_2^5 + 494 y_1^{10} y_2^{10} + 228 y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20}. \tag{5.}$$

Setzen wir

$$\varphi_{30} = (y_1^{10} + y_2^{10})(y_1^{20} + 522 y_1^{15} y_2^5 - 10006 y_1^{10} y_2^{10} - 522 y_1^5 y_2^{15} + y_2^{20}), \tag{6.}$$

so ergiebt sich, wie oben, dass φ_{30} eine Primform, und die Gleichung

$$\varphi_{30}^2 = \overline{H}(f_{12})^3 + 1728 f_{12}^5, \tag{7.}$$

also:

IV. Die Form φ_{30} ist die Primform 30sten Grades und ihr Quadrat eine rationale Function von z.

Unter Zuhülfenahme des Satzes II. No. 6 und des Satzes in No. 5 ergiebt sich also:

V. Es giebt

für $N = 6$, $L = 8$ ausser f_6, $H(f_6)$, φ_{12} und den in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen 24sten Grades,

13] und für $N = 12$, $L = 10$ ausser f_{12}, $H(f_{12})$, φ_{30} und den in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen 60sten Grades keine anderen Primformen.

VI. Für $N = 6$, $L = 8$ ist jede Primform F 24sten Grades in der Form

$$\Phi_{24} = \nu \overline{H}(f_6)^3 + \lambda f_6^4, \tag{8.}$$

für $N = 12$, $L = 10$ ist jede Primform F 60sten Grades in der Form

$$\Phi_{60} = \nu \overline{H}(f_{12})^3 + \lambda f_{12}^5 \tag{8a.}$$

enthalten, und umgekehrt sind Φ_{24}, Φ_{60} Primformen 24sten resp. 60sten Grades, wenn nicht $\lambda = 0$ oder $\nu = 0$ oder resp. $\frac{\lambda}{\nu} = 108$, $\frac{\lambda}{\nu} = 1728$.

Man darf in der That nur ν und λ so bestimmen, dass Φ_{24} resp. Φ_{60} durch einen Linearfactor von F theilbar wird. Diese Formen sind alsdann (A. p. 115[1]) S. VI.) durch F theilbar. Der Quotient ist eine von Null verschiedene Constante, weil die genannten Formen mit F von gleichem Grade sind und nur für $\lambda = \nu = 0$ identisch verschwinden können. Der zweite Theil des Satzes folgt daraus, dass, wenn nicht $\lambda = 0$ oder $\nu = 0$, Φ_{24} resp. Φ_{60} weder durch f noch durch $H(f)$ theilbar sein kann, und resp. durch φ_{24} und φ_{60} nur theilbar ist für $\frac{\lambda}{\nu} = 108$ resp. $\frac{\lambda}{\nu} = 1728$. Da also die Formen Φ_{24}, Φ_{60} ausser in diesen Fällen nicht in Primformen niedrigeren Grades zerlegbar sind, so sind sie selber Primformen.

Sind F_1, F_2, F_3 drei Primformen μ^{ten} Grades, so folgt aus ihrer Darstellung durch Gl. (8.) resp. (8a.) der Satz:

VII. Die sämmtlichen Primformen μ^{ten} Grades sind rationale Functionen. Zwischen je drei derselben findet eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt.

8.

Es sei

$$f_6 = \chi(z), \tag{1.}$$

wo $\chi(z)$ die Quadratwurzel einer rationalen Function von z, so ergiebt sich aus A. p. 128[2]) Gl. (8.)

$$H(f_6) = C\left[\left(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\right)^2 + 6\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 36P\right]\chi(z)^2 = \chi_1(z), \tag{2.}$$

wo C eine Constante.

Die mit noch zu bestimmenden Constanten zu multiplicirenden Linearfactoren von f_6 genügen einer Gleichung 48sten Grades

$$y^{48} + p_1 y^{40} + p_2 y^{32} + p_3 y^{24} + p_4 y^{16} + p_5 y^8 + p_6 = 0. \tag{A.}$$

Wir wollen die Coefficienten dieser Gleichung als ganze homo- [14 gene Functionen der rationalen Functionen $\chi(z)^2$ und $\chi_1(z)$ darstellen.

[1]) S. 31 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 45 dieses Bandes. Sch.

Es seien $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1$ noch zu bestimmende Constanten, η eine primitive 4te Wurzel der negativen Einheit, so sind die 8ten Potenzen der Wurzeln der Gl. (A.)

$$\alpha y_1^8, \quad \alpha_1 y_2^8, \quad \beta(y_1-\eta y_2)^8, \quad \beta_1(y_1+\eta y_2)^8, \quad \gamma(y_1-i\eta y_2)^8, \quad \gamma_1(y_1+i\eta y_2)^8.$$

Die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots$ sind Formen, welche gleich rationalen Functionen von z sind. Der Coefficient p als der negative Werth der Summe der 8ten Potenzen der Wurzeln ist eine Form 8ten Grades, demnach eine Primform, weil p_1 nicht verschwinden kann, ohne dass auch α verschwindet, was nicht möglich ist. Nach S. V. voriger Nummer ist also

$$p_1 = \lambda_1 \overline{H}(f_6), \tag{3.}$$

wo λ_1 eine Constante. Durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten ergiebt sich

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta = \gamma_1 = \gamma = \tfrac{1}{16}\alpha, \quad \lambda_1 = \tfrac{5}{4}\alpha.$$

Wählen wir $\alpha = 16$, so dass $\sqrt{2}\,y_1$ der Gleichung (A.) genügt, so sind die achten Potenzen der Wurzeln derselben:

$$16y_1^8, \quad 16y_2^8, \quad (y_1-\eta y_2)^8, \quad (y_1+\eta y_2)^8, \quad (y_1-i\eta y_2)^8, \quad (y_1+i\eta y_2)^8 \tag{ω.}$$

und

$$\lambda_1 = 20.$$

Bezeichnet man mit s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen (ω.), so ist s_k eine Form $8k^{ten}$ Grades, welche gleich einer rationalen Function. Zerlegt man diese Form, unter Berücksichtigung der Gleichung (4.) in No. 7 und der Sätze V. und VI. derselben Nummer, in Primformen, so ergiebt sich folgende Gestalt derselben:

$$\left\{\begin{aligned} s_2 &= \lambda_2 H^2, \\ s_3 &= \lambda_3 H^3 + \mu_3 f^4, \\ s_4 &= \lambda_4 H^4 + \mu_4 f^4 H, \\ s_5 &= \lambda\ H^5 + \mu_5 f^4 H^2, \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

wo H und f zur Abkürzung für $\overline{H}(f_6)$ resp. f_6 gesetzt ist.

Die Grössen λ und μ werden durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen bestimmt.

Mit Hülfe der Gleichungen (4.) werden alsdann die Coefficienten p_3, p_2, p_1, p_0 berechnet, während p_6 als Product der Grössen (ω.) die Form hat: [15

$$p_6 = \lambda_6 f_6^3. \tag{5.}$$

Die Vergleichung zweier Coefficienten auf beiden Seiten liefert

$$\lambda_6 = 16^3.$$

Man erhält demnach

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 = -20\chi_1, \quad p_2 = 70\chi_1^2, \\ p_3 = -100\chi_1^3 - 14.3088\chi^4, \quad p_4 = 65\chi_1^4 - 40.424\chi_1\chi^4, \\ p_5 = -16\chi_1^5 - 1248\chi_1^2\chi^4, \quad p_6 = 16^3\chi^3, \end{array}\right. \tag{6.}$$

wo χ, χ_1 zur Abkürzung für $\chi(s)$ resp. $\chi_1(s)$ gesetzt ist.

9.

Es sei wiederum

$$f_{12} = \chi(s), \tag{1.}$$

wo $\chi(s)$ eine rationale Function von s, so ergiebt sich aus A. p. 128[1]) Gl. (8.)

$$\overline{H}(f_{12}) = C\left[\left(\frac{d\log\chi(s)}{ds}\right)^2 + 12\frac{d^2\log\chi(s)}{ds^2} - 12^3 P\right]\chi(s)^3 = \chi_1(s). \tag{2.}$$

Die mit bestimmten Constanten multiplicirten Linearfactoren von f_{12} genügen einer Gleichung 120sten Grades, welche nur solche Potenzen der Unbekannten enthält, deren Exponenten durch zehn theilbar.

Bezeichnet man also die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + 11x - 1 = 0 \tag{3.}$$

mit p^5, q^5, ferner mit η eine primitive fünfte Wurzel der Einheit, endlich die zehnten Potenzen der Glieder des reducirten Wurzelsystems der Gleichung mit

$$\alpha y_1^{10}, \quad \alpha_1 y_2^{10}, \quad \beta_k(y_1 - p\eta^k y_2)^{10}, \quad \gamma_k(y_1 - q\eta^k y_2)^{10}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

so ergiebt die Bedingung, dass die Summe dieser Grössen als eine Form zehnten Grades, welche gleich einer rationalen Function, (in Folge der Voraussetzung $N = 12$) identisch verschwinden muss,

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{-q^5}{5(q^5 - p^5)}\alpha,$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \frac{p^5}{5(q^5 - p^5)}\alpha.$$

[1]) S. 45 dieses Bandes. Sch.

Demnach sind die zehnten Potenzen der Wurzeln der Gleichung, welcher $\sqrt[4]{5}\,y_1$ genügt:

$$(\omega.) \qquad 25\sqrt{5}\,y_1,\quad 25\sqrt{5}\,y_2,\quad -q^5(y_1-\eta_l^k p y_2)^{10},\quad p^5(y_1-\eta_l^k q y_2)^{10},\quad (k=0,1,2,3,4)$$

16] und diese Gleichung lautet:

$$(B.)\quad y^{120}+p_2y^{100}+p_3y^{90}+p_4y^{80}+p_5y^{70}+p_6y^{60}+p_7y^{50}+p_8y^{40}+p_9y^{30}+p_{10}y^{20}+p_{11}y^{10}+p_{12}=0.$$

Bezeichnet man wieder mit s_k die k^{te} Potenzsumme der Grössen (ω.) und zerlegt die Formen $10k^{ten}$ Grades in Primformen, so ergiebt sich unter Zuhülfenahme der Sätze II., IV., V. in No. 7 eine Darstellung derselben als ganze homogene Functionen von f_{12}, $\overline{H}(f_{12})$, φ_{30}, in welcher die Coefficienten durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten bestimmt werden. Aus den Potenzsummen ergeben sich alsdann folgende Werthe der Coefficienten p als ganze homogene Functionen von $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, und von

$$\varphi_{30}(z)=\sqrt{\chi_1(z)^5+1728\chi(z)^5}:$$

$$(4.)\quad \left\{\begin{array}{l} p_2=\varkappa_2\chi_1,\quad p_3=\lambda_3\varphi,\quad p_4=\varkappa_4\chi_1^2,\quad p_5=\lambda_5\chi_1\varphi,\\ p_6=\varkappa_6\chi_1^3+\lambda_6\chi^5,\quad p_7=\lambda_7\chi_1^2\varphi,\quad p_8=\varkappa_8\chi_1^4+\lambda_8\chi_1\chi^5,\\ p_9=\lambda_9\chi_1^3\varphi+\mu_9\chi^5\varphi,\quad p_{10}=\varkappa_{10}\chi_1^5+\lambda_{10}\chi_1^2\chi^5,\\ p_{11}=\lambda_{11}\chi_1^4\varphi+\mu_{11}\chi^5\chi_1\varphi,\quad p_{12}=5^5\chi^{10}, \end{array}\right.$$

wo χ, χ_1, φ zur Abkürzung für resp. $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, $\varphi_{30}(z)$ gesetzt ist, und worin $\varkappa_2, \varkappa_4, \ldots, \lambda_3, \lambda_5, \ldots, \mu_9, \ldots$ vollständig bestimmte numerische Grössen sind.

Natürlich könnte man auch die Formen (4.) der Coefffcienten p direct aus der Zerlegung derselben in Primformen, unter Zuhülfenahme der Sätze II., IV., V. in No. 7 aufstellen und die Unbekannten $\varkappa$, λ, μ durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten bestimmen. Allein es erleichtert wesentlich die Rechnung, die Coefficienten p durch Vermittlung der Potenzsummen s_k herzuleiten. Dieselbe Bemerkung ist auch bei den analogen Gleichungen (6.) voriger Nummer zu machen.

Die Form für p_{12} ergiebt sich daraus, dass dieser Coefficient das Product der Grössen (ω.) sein muss.

Da die Grössen p rationale Functionen von z sind und $L=10$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (4.) ausserdem:

Die Primform φ_{30} ist eine rationale Function.

10.

Es sei a ein singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py,$$

η_1, η_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, welche resp. den Wurzeln [17 r, $1-r$ der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung entsprechen, wobei wir voraussetzen wollen, dass r die kleinere der beiden Wurzeln ist, was erlaubt ist, weil dieselben verschieden sein müssen (s. m. Abh. Bd. 66[1]), No. 6). Es sei alsdann

$$(1.) \qquad y_1 = \gamma_1\eta_1 + \delta_1\eta_2, \quad y_2 = \gamma_2\eta_1 + \delta_2\eta_2.$$

Substituirt man diese Werthe für y_1, y_2 in eine Primform n^{ten} Grades, so kann zweierlei eintreten. Entweder ist der Coefficient von η_1^n Null oder nicht. Im ersteren Falle ist der Coefficient von $\eta_1^{n-1}\eta_2$ jedenfalls von Null verschieden, weil f als Primform nicht durch η_2^2 theilbar sein kann. Hieraus ergiebt sich der Satz:

I. Eine Primform f n^{ten} Grades hat in der Umgebung eines singulären Punktes a entweder die Form

$$(2.) \qquad f = (z-a)^{nr}\varphi(z)$$

oder

$$(2a.) \qquad f = (z-a)^{(n-2)r+1}\varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ Wurzel einer rationalen Function ist, welche für $z = a$ weder Null noch unendlich ist.

Wenn weder f noch $H(f)$ die Form (2a.) hat, so kann $\frac{\lambda}{\varrho}$ so bestimmt werden, dass die Form Φ_{24}, resp. Φ_{30} durch η_2 theilbar wird. Es giebt also eine Primform der Gestalt (2a.). Andererseits sind (nach A. p. 114[2]) S. IV.) nicht zwei verschiedene Primformen gleichzeitig durch η_2 theilbar. Es ergiebt sich also:

II. Von der Gesammtheit der Primformen hat eine die Gestalt (2a.), die übrigen die Gestalt (2.).

---

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

[2]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades N, so ist nach No. 7

a) für $N = 6$, f_6^2 rational, also

entweder $12r$ oder $8r$ eine ganze Zahl,

also weil $L = 8$, unter Berücksichtigung von A. p. 135[1]) Gl. (5.) der Nenner von r eine der Zahlen

(α.) $\qquad 1, 2, 3, 4, 6, 8;$

b) für $N = 12$ ist f_{12} rational, also

entweder $12r$ oder $10r$ eine ganze Zahl,

18] demnach, weil $L = 10$, der Nenner von r eine der Zahlen

(β.) $\qquad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10.$

Fasst man beides zusammen, so erhält man den Satz:

III. Die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen haben für $N = 6$ einen der Zahlenwerthe (α.), für $N = 12$ einen der Zahlenwerthe (β.).

Aus dem Satze I. ergiebt sich übrigens folgende Gestalt einer Primform n^{ten} Grades als Function von s:

(3.) $$f(s) = \psi(s)(s-a_1)^{(n-2\varepsilon_1)r_1+\varepsilon_1} \times (s-a_2)^{(n-2\varepsilon_2)r_2+\varepsilon_2} \ldots,$$

wenn man mit $a_1, a_2, \ldots$ die singulären Punkte, mit $r_1, r_2, \ldots$ resp. die jedesmal kleinere der beiden Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Zahlen, welche entweder den Werth Null oder Eins haben, endlich mit $\psi(s)$ eine ganze rationale Function bezeichnet, welche für keinen der singulären Punkte verchwindet.

11.

Wir betrachten jetzt den Fall

$$N = 4,$$

Nach S. II. No. 2 ist in diesem Falle

(1.) $$\mu \leqq 12,$$

[1]) S. 52 dieses Bandes. Sch.

also nach S. IV. No. 1

(2.) $$m \leqq 24,$$

folglich ist in Übereinstimmung mit A. p. 125[1])

(3.) $$L \leqq 6.$$

Es sei

a) $L < 3$, so wird (nach A. p. 135[2]) Gl. (5.) und p. 138[3]) No. 26) die Differentialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt.

b) $L = 4$ ist aus dem A. p. 125[1]) angegebenen Grunde auszuschliessen.

c) $L = 5$ kann nicht statthaben, weil in diesem Falle die Primform 4ten Grades durch y_1^2 oder y_2^2 theilbar sein müsste.

d) $L = 3$ oder 6.

Ist j eine primitive dritte oder sechste Wurzel der Einheit und sind y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, welche auf einem gewissen Wege gleichzeitig in $y_1 j, y_2 j^{-1}$ resp. übergehen, so ergiebt sich, dass eine Prim- [19
form vierten Grades eine der beiden Gestalten hat

$$(\alpha.)\quad a_0 y_1^4 + a_2 y_1 y_2^3, \qquad (\beta.)\quad a_1 y_1^3 y_2 + a_4 y_2^4.$$

Da die erstere durch y_1, die zweite durch y_2 theilbar ist, so folgt aus A. p. 114[4]) S. IV., dass, wenn erst a_0, a_1, a_2, a_4 fixirt sind, jede Primform vierten Grades mit einer der beiden Formen (α.) oder (β.) übereinstimmt. Wir fixiren $a_0 = 1$, $a_2 = 1$, was erlaubt ist, da y_1, y_2 mit beliebigen constanten Factoren multiplicirt werden dürfen. Es wird dann die Form (α.)

(4.) $$f_4 = y_1^4 + y_1 y_2^3.$$

Nun ist

(5.) $$H(f_4) = 9(8y_1^3 y_2 - y_2^4).$$

Nehmen wir als Form (β.)

(6.) $$\overline{H}(f_4) = 8y_1^3 y_2 - y_2^4,$$

so sind f_4 und $\overline{H}(f_4)$ die einzigen Primformen vierten Grades. Es ist demnach die Hessesche Covariante von f_4 von dieser Form verschieden.

---

[1]) S. 42 dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 52 dieses Bandes. Sch.
[3]) S. 56 dieses Bandes. Sch.
[4]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Aus dem Satze V. No. 2 ergiebt sich aber, dass der Index jedes reducirten Wurzelsystems, also auch L eine gerade Zahl sein muss.

Wir erhalten also den Satz:

I. Für $N = 4$ ist $L = 6$, und es sind f_4 und $\overline{H}(f_4)$ die einzigen Primformen vierten Grades.

Es ergiebt sich

$$H^3(f_4) = -9^3 . 24^3 f_4. \tag{7.}$$

Demnach folgert man aus dem Satze IV. No. 2:

II. f_4^3 und $\overline{H}(f_4)^3$ sind rationale Functionen von z.

Bestimmt man λ so, dass

$$\psi = -\overline{H}(f_4)^3 + \lambda f_4^3$$

durch einen Linearfactor der Form

$$\varphi_6 = \frac{1}{y_2}\left[\overline{H}(f_4)\frac{\partial f_4}{\partial y_1} - f_4\frac{\partial \overline{H}(f_4)}{\partial y_1}\right] = 8y_1^6 - 20y_1^3y_2^3 - y_2^6 \tag{8.}$$

theilbar wird, so wird ψ, aus demselben Grunde wie in No. 7 in den ähnlichen Fällen, durch φ_6^3 theilbar. Es ergiebt sich

$$\varphi_6^3 = -\overline{H}(f_4)^3 + 64 f_4^3. \tag{9.}$$

Da eine Form sechsten Grades nicht Wurzel einer rationalen Function sein kann, ohne Primform zu sein (weil $N = 4$), so ist φ_6 eine Primform. 20] Nach No. 6 Gl. (3.) und (3a.) giebt es nicht zwei verschiedene Primformen sechsten Grades.

Die Form

$$F = \nu\overline{H}(f_4)^3 + \lambda f_4^3 \tag{10.}$$

ist eine Primform für jedes Werthsystem der Constanten λ und ν, ausser für $\nu = 0$ oder $\lambda = 0$, oder $\nu = -1$, $\lambda = 64$. Umgekehrt ist jede Primform F zwölften Grades in der Form (10.) enthalten. Denn man kann $\frac{\lambda}{\nu}$ so bestimmen, dass die rechte Seite der Gleichung (10.) durch einen Linearfactor von F, also (A. p. 114[1]) S. IV.) durch F theilbar wird. Der Quotient ist eine Constante, welche nicht verschwindet, weil f_4 und $\overline{H}(f_4)$ von einander verschieden sind. Fasst man das Vorhergehende zusammen, so folgt:

[1]) S. 30 dieses Bandes. Sch.

III. Für $N = 4$ giebt es nur die Primformen f_4, $\overline{H}(f_4)$, φ_6 und die in unendlicher Anzahl vorhandenen Primformen zwölften Grades. Die letzteren sind sämmtlich durch die Gleichung (10.) dargestellt.

Es ergiebt sich aus der Gleichung (10.), ebenso wie in No. 7, dass zwischen je drei Primformen zwölften Grades eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet.

12.

Die Linearfactoren von f_4, mit bestimmten Constanten multiplicirt, genügen einer Gleichung 24sten Grades, welche nur sechste Potenzen der Unbekannten enthält.

Die sechsten Potenzen der Glieder des reducirten Wurzelsystems derselben seien

$$\alpha y_1^6, \quad \beta(y_1+y_2)^6, \quad \gamma(y_1+py_2)^6, \quad \delta(y_1+p^2y_2)^6,$$

wo p eine primitive dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Es ergiebt sich, dass die Summe dieser Grössen nicht Null sein darf, weil hierzu die unmögliche Bedingung $\alpha = 0$ zu erfüllen wäre. Diese Summe als Form sechsten Grades, welche gleich einer rationalen Function, ist demnach gleich φ_6 multiplicirt mit einer Constanten. Hieraus folgt

$$\beta = \gamma = \delta = -\tfrac{1}{27}\alpha, \quad \text{und die Summe gleich } \tfrac{1}{9}\alpha\varphi_6.$$

Wählen wir $\alpha = -27$, so ist das reducirte Wurzelsystem der Gleichung, welcher $\sqrt[6]{-27}\,y_1$ genügt:

$$(\omega.) \qquad \sqrt[6]{-27}\,y_1, \quad (y_1+y_2), \quad (y_1+py_2), \quad (y_1+p^2y_2).$$

Es sei wiederum [21

$$(1.) \qquad f_4 = \chi(z),$$

wo $\chi(z)$ die Kubikwurzel einer rationalen Function, und

$$(2.) \qquad \overline{H}(f_4) = C\left[\left(\frac{d\log\chi(z)}{dz}\right)^2 + 4\frac{d^2\log\chi(z)}{dz^2} - 16P\right]\chi(z)^2 = \chi_4(z),$$

so können wir die Coefficienten der Gleichung

$$(C.) \qquad y^{24} + p_1y^{18} + p_2y^{12} + p_3y^6 + p_4 = 0,$$

welcher die Grössen (ω.) genügen, folgendermaassen als ganze homogene Functionen von $\chi(z)$, $\chi_1(z)$ und

$$\varphi_6(z) = \sqrt{-\chi_1(z)^3 + 64\chi(z)^3} \tag{3.}$$

darstellen.

Bezeichnen wir nämlich wieder mit s_k die k^{te} Potenzsumme der sechsten Potenzen der Grössen (ω.), so ergiebt die Zerlegung der Form s_k in Primformen ihre Darstellung als ganze homogene Function von f_4, $\overline{H}(f_4)$ und φ_6. Die Unbekannten ergeben sich wieder durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten. Auf diesem Wege erhalten wir:

$$(4.) \quad \begin{cases} s_1 = -3\varphi, \quad s_2 = -3\chi_1^3 + 732\chi^3, \\ s_3 = 3\chi_1^3\varphi - 2460\chi^3\varphi, \quad s_4 = 3\chi_1^6 - 6216\chi_1^3\chi^3 + 531444\chi_1^6, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung χ, χ_1, φ für $\chi(z)$, $\chi_1(z)$, $\varphi_6(z)$ resp. gesetzt ist.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass φ_6 eine rationale Function von z ist.

Aus den Gleichungen (4.) ergeben sich die Werthe der Coefficienten der Gleichung (C.)

$$(5.) \quad p_1 = 3\varphi, \quad p_2 = -3\chi_1^3 - 78\chi^3, \quad p_3 = -\chi_1^3\varphi + 10\chi^3\varphi, \quad p_4 = -27\chi^6.$$

Die letztere dieser Gleichungen ergiebt sich auch unmittelbar daraus, dass p_4 gleich dem Producte der sechsten Potenzen der Grössen (ω.) ist.

Aus dem Satze I. No. 10 und aus A. p. 135[1]) Gl. (5.) ergiebt sich:

Die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen fallen für $N = 4$ mit einer der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 6$$

zusammen.

Dieser Satz, zusammen mit Satz III. No. 10, liefert den Satz A. p. 135[2]) mit der näheren Bestimmung, dass die Nenner 7 und 9 für $N > 2$ überhaupt ausgeschlossen sind.

---

[1]) S. 52 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 58 dieses Bandes. Sch.

13. [22

In den Nummern 8, 9, 12 ist gezeigt worden, wie die Coefficienten der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, vermittelst einer Function $\chi(z)$ ausgedrückt werden können.

Diese Function χ ist für $N = 6$ die Quadratwurzel, für $N = 4$ die Kubikwurzel einer rationalen Function, dagegen für $N = 12$ eine rationale Function.

Die Exponenten der Factoren von χ, welche für die singulären Punkte Null oder unendlich werden, sind durch die Gleichung (3.) No. 10 näher bestimmt.

Die definitive Bestimmung von χ erfolgt (nach A. p. 129—133[1]) dadurch, dass diese Function einer linearen homogenen Differentialgleichung resp. der 5ten, 7ten oder 13ten Ordnung, oder dem Systeme von resp. 4, 6, 12 solchen Differentialgleichungen zu genügen hat. Obgleich diese Bestimmung wesentlich durch die gewonnene Kenntniss der Beschaffenheit der Exponenten derjenigen Factoren von χ, welche für die singulären Punkte Null oder unendlich werden, erleichtert wird, so ist doch zuweilen folgender Weg zur Bestimmung von χ vorzuziehen.

Ist f eine Form vom k^{ten} Grade, so kann man aus den beiden Gleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} y_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y_2} y_2 = kf, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial f}{\partial y_2} y_2' = \dfrac{df}{dz}, \end{cases} \qquad y_1' = \frac{dy_1}{dz},\quad y_2' = \frac{dy_2}{dz},$$

$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}$ berechnen. Für jede dieser Formen $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades werden die den beiden Gleichungen (1.) analogen Gleichungen aufgestellt, und aus diesen $\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}$ berechnet.

Ist nun $f = \chi$, wo χ Wurzel einer rationalen Function von z, so ergiebt diese Rechnung unter Zuhülfenahme von A. p. 104[2]) Gl. (2.)

$$(2.)\qquad H(f) = C\left[\left(\frac{d\log\chi}{dz}\right)^2 + k\frac{d^2\log\chi}{dz^2} - k^2 P\right]\chi^2 = \chi_1,$$

wo C eine Constante bedeutet. Diese Gleichung haben wir in den Nummern

[1]) S. 46—51 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 19 dieses Bandes. Sch.

8, 9, 12 bereits für $k = 6, 12, 4$ aus A. p. 128[1]) durch directe Ausrechnung deducirt.

Aus den Gleichungen (3.) und (4.) No. 4 und Gleichung (7.) No. 11 ergiebt sich:

23] Die Functionen χ und χ_1 genügen den Systemen von Differentialgleichungen:

$$(3.)\qquad \begin{cases} C\left[\left(\frac{d\log\chi}{dz}\right)^2 + N\frac{d^2\log\chi}{dz^2} - N^2P\right]\chi^2 = \chi_1, \\ C'\left[\left(\frac{d\log\chi_1}{dz}\right)^2 + (2N-4)\frac{d^2\log\chi_1}{dz^2} - (2N-4)^2P\right]\chi_1^2 = \chi^\lambda, \end{cases}$$

wo C, C' Constanten und $\lambda = 1$ für $N = 4$, $\lambda = 2$ für $N = 6$, $\lambda = 3$ für $N = 12$.

Die Gleichungen (3.) können dazu dienen, die ganze rationale Function $\psi(z)$ zu bestimmen, welche in Gleichung (3.) No. 10 als Factor von χ auftritt, wodurch nach dem Obigen χ vollständig bestimmt ist. Der Grad von $\psi(z)$ ergiebt sich auf ähnliche Weise wie A. p. 133[2]) der Grad von $g(z)$.

14.

Zum Beschluss fügen wir noch zwei fernere Beweise des Satzes,

dass die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen mit einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 zusammenfallen müssen, wenn $N > 2$, hinzu (siehe No. 10, S. III., den Satz am Schluss von No. 12 und A. p. 135[3])). Wir glauben diese Beweise um so weniger unterdrücken zu dürfen, weil sie diesen Satz fast als eine unmittelbare Folge aus der Begriffsbestimmung einer Primform darstellen.

Ist f eine Primform n^{ten} Grades, gebildet aus einem beliebigen Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, so dürfen in derselben nicht gleichzeitig die Glieder mit y_1^n und $y_1^{n-1}y_2$, ebenso wenig gleichzeitig die Glieder mit y_2^n, $y_2^{n-1}y_1$ fehlen, weil f weder durch y_1^2 noch durch y_2^2 theilbar sein darf (A p. 114[4])). Die Primform besteht daher aus mindestens zwei Gliedern.

1) S. 45 dieses Bandes. Sch.
2) S. 51 dieses Bandes. Sch.
3) S. 53 dieses Bandes. Sch.
4) S. 30 dieses Bandes. Sch.

Es sei demnach erstens

$$f = a_0 y_1^n + a_k y_1^{n-k} y_2^k + \cdots,$$

wo a_0 und a_k von Null verschieden sind. Da $k \geqq 1$, so ergiebt sich, dass die höchste Potenz von y_1 in $H(f)$ die $(2n-k-2)^{\text{te}}$ ist, demnach ist die niedrigste Potenz von y_2 in dieser Form die $(k-2)^{\text{te}}$, weil $H(f)$ vom $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades, so ist auch $H(f)$ eine Primform (A. p. 116[1])) und als solche nicht durch y_2^2 theilbar. Demnach muss

$$k-2 < 2,$$

d. h. k eine der Zahlen 1, 2, 3 sein.

Haben nun r und a dieselbe Bedeutung wie in No. 10, während y_1, y_2 [24 mit den dortigen η_1, η_2 resp. übereinstimmen, so ist — da f nach einem Umlaufe um a sich mit einer Einheitswurzel multiplicirt —

$$nr - [(n-2k)r + k],$$

also auch $2kr$ eine ganze Zahl.

Der Nenner von r ist demnach eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6.

Es sei zweitens

$$f = a_1 y_1^{n-1} y_2 + a_k y_1^{n-k} y_2^k + \cdots,$$

a_1 und a_k von Null verschieden, so ist

$$H(f) = -(n-1)^2 a_1^2 y_1^{2n-4} + (n-1)k((k-3)n+2) a_1 a_k y_1^{2n-k-3} y_2^{k-1} + \cdots.$$

Es sei $k > 2$, so sind die Coefficienten von y_1^{2n-4} und von $y_1^{2n-4-(k-1)} y_2^{k-1}$ in $H(f)$ von Null verschieden und die höchste Potenz von y_1 in $H^2(f)$, nach dem im ersten Falle Bewiesenen, die $(4n-k-9)^{\text{te}}$. Demnach ist $H^2(f)$ als eine Form vom Grade $4n-12$ durch y_2^{k-3} theilbar.

Ist wieder f eine Primform niedrigsten Grades, so kann $H^2(f)$ nicht durch die vierte Potenz einer Primform, folglich auch nicht (A. p. 115[2])) durch y_2^4 theilbar sein. Demnach ist

$$k-3 < 4,$$

d. h. k eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6.

---

1) S. 32 dieses Bandes. Sch.

2) S. 31 dieses Bandes. Sch.

In diesem Falle ist

$$(n-2)r+1-[(n-2k)r+k],$$

also auch $(2k-2)r$ eine ganze Zahl, d. h.

der Nenner von r ist eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

15.

Der einfachste Beweis des in voriger Nummer erwähnten Satzes ist wohl der folgende.

Ist f eine Primform niedrigsten Grades, so sind f und $H(f)$ nicht durch y_2^2 und $H^2(f)$ nicht durch y_2^4 theilbar. Demnach enthält

f ein Glied der Form $a_0 y_1^n$ oder $a_1 y_1^{n-1} y_2$,

$H(f)$ ein Glied der Form $b_0 y_1^{2n-4}$ oder $b_1 y_1^{2n-5} y_2$,

$H^2(f)$ ein Glied der Form $c_0 y_1^{4n-12}$ oder $c_1 y_1^{4n-13} y_2$ oder $c_2 y_1^{4n-14} y_2^2$ oder $c_3 y_1^{4n-15} y_2^3$.

Haben a, r wieder dieselbe Bedeutung wie in No. 10, während y_1, y_2 mit 25] den dortigen η_{i1}, η_{i2} resp. übereinstimmen, bezeichnen wir ferner den Nenner von r mit ν und mit j eine primitive ν^{te} Wurzel der Einheit, so gehen nach einem Umlaufe von z um a

f in $j^n f$ oder in $j^{n-2} f$,

$H(f)$ in $j^{2n-4} H(f)$ oder in $j^{2n-6} H(f)$,

$H^2(f)$ in $j^{4n-12} H^2(f)$ oder in $j^{4n-14} H^2(f)$ oder in $j^{4n-16} H^2(f)$ oder in $j^{4n-18} H^2(f)$ über.

Da nach S. IV. No. 2 $\frac{H(f)}{f^2}$, $\frac{H^2(f)}{f^4}$ ungeändert bleiben müssen, so ist erforderlich, dass gleichzeitig eine der Congruenzen:

$$2n \equiv 2n-4, \quad 2n \equiv 2n-6, \quad \text{mod. } \nu$$

und eine der Congruenzen

$$4n \equiv 4n-12, \quad 4n \equiv 4n-14, \quad 4n \equiv 4n-16, \quad 4n \equiv 4n-18, \quad \text{mod. } \nu$$

stattfindet, oder gleichzeitig eine der Congruenzen

$$2(n-2) \equiv 2n-4, \quad 2(n-2) \equiv 2n-6, \quad \text{mod. } \nu$$

und eine der Congruenzen

$$4(n-2) \equiv 4n-12, \quad 4(n-2) \equiv 4n-14, \quad 4(n-2) \equiv 4n-16, \quad 4(n-2) \equiv 4n-18, \quad \text{mod. } \nu.$$

Hieraus ergiebt sich, dass ν eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 ist.

Heidelberg, den 3. November 1877.

XXVI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE.

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 85, 1877, p. 947—950; Séance du 19 Novembre 1877.)

En désignant par y_1 une intégrale de l'équation différentielle [947

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_0 y = 0$$

et posant

$$\Delta = e^{-\int p_1 dx},$$

on tire d'un théorème du no. 2 de mon Mémoire dans le Journal de Borchardt, t. 66 [1]), que

$$y_2 = y_1 \int \frac{\Delta}{y_1^2} dx$$

est aussi une intégrale, et que l'on n'a jamais

$$y_2 = \text{const.}\, y_1,$$

de sorte que y_1, y_2 font un système fondamental d'intégrales. Si l'équation a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py, \tag{1.}$$

une intégrale quelconque y_1 fait avec

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} \tag{2.}$$

---

[1]) Mémoire VI, p. 150, t. I de cette édition. Sch.

un système fondamental. La forme (2.) de la fonction y_2 est permanente pour des valeurs quelconques des constantes contenues dans P. Il n'y a lieu de faire, dans certains cas, une distinction que si l'on veut effectuer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{y_1^2}.$$

Soit par exemple,

(3.) $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y = 0,$$

948] une intégrale y_1 est

(4.) $$y_1 = x^{\frac{1}{2}+a},$$

et l'on a

(5.) $$y_2 = x^{\frac{1}{2}+a} \int_\alpha^x x^{-(1+2a)} dx.$$

La forme (5.) est valable pour toute valeur de a; mais, si l'on veut obtenir explicitement l'intégrale

$$\int_\alpha^x x^{-(1+2a)} dx$$

par des fonctions connues, il faut distinguer les deux cas $a = 0$ et a non égal à zéro.

C'est de même ce qui arrive à l'égard de l'équation différentielle

(6.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 \sin^2 \operatorname{am} x + k^2 \sin^2 \operatorname{am} a - 1 - k^2) y.$$

Vous avez trouvé que

(7.) $$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)} e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}$$

est une intégrale; donc

(8.) $$y_2 = y_1 \int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)\, e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}}{\mathrm{H}^2(x+a)} dx$$

est aussi une intégrale valable pour toute valeur de a et qui fait avec y_1 un système fondamental. Une distinction n'est à faire que si l'on veut

exprimer y_2 par des fonctions connues. En effet on trouve

$$(9.) \qquad \frac{\Theta^2(x)}{H^2(x+a)} e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} = \frac{1}{C}\frac{d}{dx}\left[\frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\right],$$

où

$$C = 2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \Delta \operatorname{am} a \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)} k.$$

Comme cette constante ne peut devenir infinie, $\sin \operatorname{am} a$, dans le coefficient de y de l'équation différentielle (6.), devant être fini, on peut avoir

$$(10.) \qquad \begin{cases} \text{ou } 1^\circ \ C = 0 \\ \text{ou } 2^\circ \ C \text{ différent de zéro.} \end{cases}$$

Dans le second cas, les équations (7.) à (9.) fournissent

$$(11.) \qquad y_2 = \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

C'est précisément votre autre intégrale. Les valeurs pour lesquelles arrive le cas premier (10.) sont

$$(12.) \qquad \begin{cases} (\alpha) \quad a = 2mK + 2niK', \\ (\beta) \quad a = (2m+1)K + 2niK', \\ (\gamma) \quad a = (2m+1)K + (2n+1)iK', \end{cases}$$

m, n étant des nombres entiers.

Dans le cas (12α.), on a [949

$$(13\alpha.) \qquad \int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)}{H^2(x+a)} e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} dx = e^{-\frac{2n^2K'\pi}{K}} \int_\alpha^x \frac{\Theta^2(x)}{H^2(x)} dx,$$

dont la valeur est, à un facteur constant près,

$$\frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{Jx}{K} + \text{const.}$$

De là et de l'équation (8.) découle le système fondamental

$$(14\alpha.) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{H(x)}{\Theta(x)}, \\ y_2 = \dfrac{H'(x)}{\Theta(x)} - \dfrac{Jx}{K}\dfrac{H(x)}{\Theta(x)}. \end{cases}$$

Dans le cas (12β.), on a

$$(13\beta.) \qquad \int_a^x \frac{\Theta^2(x)\, e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}}{\mathrm{H}^2(x+a)}\, dx = e^{-\frac{2n^2\pi K'}{K}} \int_a^x \frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}_1^2(x)}\, dx,$$

dont la valeur est, à un facteur constant près,

$$x\frac{\Theta_1''(0)}{k'^2} - \frac{1}{k'^2}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \text{const.}$$

De là et de l'équation (8.) découle le système fondamental

$$(14\beta.) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \\ y_2 = x\dfrac{\Theta_1''(0)}{k'^2}\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} - \dfrac{1}{k'^2}\dfrac{\mathrm{H}_1(x)\,\Theta'(x)}{\Theta^2(x)}. \end{cases}$$

Dans le cas (12γ.), on a

$$(13\gamma.) \qquad \int_a^x \frac{\Theta^2(x)\, e^{2x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}}{\mathrm{H}^2(x+a)}\, dx = e^{-\frac{2\pi K'}{K}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \int_a^x \frac{\Theta^2(x)}{\Theta_1^2(x)}\, dx,$$

dont la valeur est, à un facteur constant près,

$$-x\frac{\Theta''(0)}{k'^2} + \frac{1}{k'^2}\frac{d\log\Theta_1(x)}{dx} + \text{const.}$$

De là et de l'équation (8.) découle le système fondamental

$$(14\gamma.) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}, \\ y_2 = -x\dfrac{\Theta''(0)}{k'^2}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} + \dfrac{1}{k'^2}\dfrac{\Theta_1'(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta_1(x)\,\Theta(x)}. \end{cases}$$

950] Par ce qui précède, il est démontré que l'équation différentielle (6.) se comporte comme l'équation différentielle (3.). La valeur de y_2 pour celle-ci est donnée par l'équation (5.), pour celle-là par l'équation (8.). Pour une valeur générale de a, y_2 a la forme $x^{\frac{1}{2}-a}$ pour l'équation (3.), et la forme (11.) pour l'équation (6). Mais la supposition $a = 0$ fait entrer le logarithme dans la valeur évaluée de y_2 de l'équation (5.), comme pour des valeurs de a données par les équations (12.), la valeur évaluée de y_2 a des formes particulières.

Mais il s'ensuit en même temps que les valeurs (12.) de a sont les seules pour lesquelles la fonction y_2 n'ait pas la forme (11.).

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

S. 146, Gl. (5.) und Zeile 14 wurde unter den Integralzeichen $x^{-(1+2a)}$ statt x^{-1+2a} gesetzt.

„ „ , „ (8.)
„ 147, „ (13α.)
„ 148, „ (13β.), (13γ.)
} wurde als untere Grenze der Integrale α statt a gesetzt.

„ 147, Zeile 3 wurde où statt ou gesetzt.

„ „ , „ 4 wurde in dem Ausdrucke für C ein vorgesetztes Minuszeichen unterdrückt und im Nenner $\Theta^2(0)$ statt $\Theta(0)$ gesetzt.

„ „ , Gl. (13α.) wurde auf der rechten Seite im Exponenten von e der Factor π hinzugefügt.

„ 148, „ (13β.) wurde auf der rechten Seite im Exponenten von e $-\frac{2n^2\pi K'}{K}$ statt $\frac{2\pi i}{K}(-n^2K+n^2iK')$, und ebenso

„ „ , „ (13γ.) $-\frac{2\pi K'}{K}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ statt $\frac{2\pi i}{K}\left(-2nK+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)iK'\right)$ gesetzt.

„ 148, Zeile 6 v. u. wurde pour statt dans gesetzt.

2) Die vorstehende Arbeit verdankt ihre Entstehung dem folgenden an FUCHS gerichteten Schreiben von HERMITE.

»Paris 27 Octobre 1877.

Mon cher ami,

Permettez moi de faire appel à votre connaissance approfondie de la nature analytique des fonctions définies par des équations différentielles linéaires, et de vous demander de vouloir bien déduire de vos principes, des relations qui me paraissent intéressantes et que je prends la liberté de soumettre à votre attention, dans le cas le plus simple. Je considère l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2k^2\operatorname{sn}^2x + k^2\operatorname{sn}^2a - 1 - k^2]y$$

dont la solution générale est ainsi donnée:

$$y = Cy_1 + C'y_2$$

en faisant:

$$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}},$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

Vous voyez que par le changement de x en $x+2K$ et $x+2iK'$, y_1 se change en μy_1 et $\mu' y_1$, tandis que y_2 devient $\frac{1}{\mu} y_2$ et $\frac{1}{\mu'} y_2$. Mais le cas particulier où l'on suppose $a = 0$ (l'un de ceux de LAMÉ) donne un tout autre résultat. Et d'abord, pour avoir dans ce cas la solution générale je pars de la formule:

$$y = C\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + C'\left[\frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)} e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\right]$$

et je développe le second terme suivant les puissances croissantes de a, ce qui donne

$$y = (C+C')\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + C'a\left[\frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{Jx}{K}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\right] + \cdots,$$

et par suite d'après le procédé de D'ALEMBERT

$$y = C_1\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + C_1'\left[\frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{Jx}{K}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\right].$$

Faisant donc

$$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{Jx}{K}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

vous voyez que par le changement de x en $x+2K$, y_1 devient $-y_1$ et y_2, $-y_2+2Jy_1$. Semblablement par le changement de x en $x+2iK'$, y_1 se reproduit, tandis que y_2 devient: $y_2 - 2iJ'y_1$. Ce que je ne vois point maintenant, mais ce que vous devez certainement voir, en considérant l'équation proposée, c'est la raison de ce changement de nature de l'intégrale, pour $a = 0$. Des circonstances toutes semblables présentent d'ailleurs lorsqu'on fait: $a = K$, puis enfin $a = K+iK'$, et peut-être vos principes ouvriraient-ils la voie, pour obtenir ces valeurs singulières auxquelles correspond une autre nature, un autre mode d'existence de l'intégrale. Vous voyez que dans le cas général de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x + h]\,y$$

ce serait une belle et grande chose, que de trouver, par cette voie, les valeurs de h, auxquelles correspondent les solutions de LAMÉ au nombre de $2n+1$, qui sont des fonctions doublement périodiques.

Permettez moi d'appeler votre attention sur ces questions, qui par des voies différentes ont été déjà abordées par LAMÉ et M. HEINE, mais qui me semblent vous revenir de droit plus qu'à tout autre, et recevez, mon cher ami, la nouvelle assurance de mes sentiments les meilleurs et les plus dévoués.

CH. HERMITE.«

Vergl. die beiden folgenden Abhandlungen XXVII, XXVIII; am Schlusse des ersten Theiles der Abhandlung XXVIII findet man eine Ausführung der Rechnung, die den Werth der Constanten C (S. 147, Gl. (9.)) liefert, und eine vereinfachte Darstellung der Bestimmung der Integrale für $a = 0, K, K+iK'$.

SCH.

XXVII.

ÜBER EINE KLASSE VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE DURCH ABELSCHE ODER ELLIPTISCHE FUNCTIONEN INTEGRIRBAR SIND.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1878, No. 1, 16. Januar 1878, Sitzung am 5. Januar, S. 19—32; wieder abgedruckt in den Annali di Matematica p. ed a., Ser. II, Bd. 9, 1878, S. 25—35.)

Die Differentialgleichung [19[1])

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \sin^2 \operatorname{am} x + h]\, y,$$

durch welche bekanntlich die Laméschen Functionen definirt werden, ist nach Lamé insbesondere von Herrn Heine zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden. Während man sich jedoch bis dahin darauf beschränkte, nur solche Werthe von h in Betracht zu ziehen, für welche die Differentialgleichung durch doppeltperiodische Functionen integrirbar ist, hat in neuerer Zeit Herr Hermite es unternommen, dieselbe Differentialgleichung für beliebige Werthe von h zu integriren (Sur quelques applications des fonctions elliptiques in den Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 15. Octobre 1877, sqq.[2]). Unter diesen Umständen scheint es nicht ohne Interesse, auf eine Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinzuweisen, welche ich in meiner Arbeit (Borchardts Journal, Band 81, p. 116—118[3]), No. 13) durch Abelsche oder elliptische Func-

---

[1]) Seitenzahlen der ersten Veröffentlichung in den Göttinger Nachrichten. Sch.

[2]) Separat erschienen, Paris 1885. Sch.

[3]) Abh. XX, S. 33—34 dieses Bandes. Sch.

tionen integrirt habe, und wovon nicht nur die Lamésche Differentialgleichung (A.), sondern auch diejenigen Differentialgleichungen, welche Herr Heine 20] (Borchardts Journal, Band 60, p. 252) den Lamé'schen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegt hat, besondere Fälle sind.

1.

Wir resumiren zuerst die Resultate der No. 13, p. 116—118 meiner Arbeit in Borchardts Journal, Band 81 [1]).

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py \tag{B.}$$

ein Integral der Form

$$y = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int \frac{dz}{\varphi(z)}} \tag{1.}$$

habe, wo $\varphi(z)^2$ eine rationale Function von z und λ eine Constante, ist die, dass P die Form habe:

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\varphi}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\log\varphi}{dz^2} - \frac{\lambda}{4\varphi^2}. \tag{C.}$$

1) Ist λ von Null verschieden, so hat Gl. (B.) das Fundamentalsystem von Integralen:

$$y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int \frac{dz}{\varphi(z)}}, \qquad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int \frac{dz}{\varphi(z)}}. \tag{D.}$$

2) Ist $\lambda = 0$, so sind

$$y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}}, \qquad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{\varphi(z)} \tag{E.}$$

ein Fundamentalsystem.

21] Für die Werthe von z, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, ist P ebenfalls unendlich, für die Nullwerthe b von $\varphi(z)$, dagegen ist P nur dann nicht unendlich, wenn

$$\varphi'(b)^2 = -\lambda, \quad \text{wo} \quad \varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}. \tag{F.}$$

1) Abh. XX, S. 33—34 dieses Bandes. Sch.

2.

Wir betrachten nunmehr den speciellen Fall:

$$(G.) \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)u = 0,$$

wo $R(z)$, $H(z)$ ganze rationale Functionen resp. vom Grade m und $m-2$ sind und $R'(z) = \frac{dR(z)}{dz}$, und ausserdem $R(z)$ nur ungleiche Linearfactoren hat.

Wendet man die Substitution

$$(1.) \qquad u = R(z)^{-\frac{1}{4}}y$$

(s. meine oben citirte Abhandlung, p. 102[1]) an, setzt

$$(2.) \qquad \varphi = GR^{\frac{1}{2}}$$

und berücksichtigt, dass die zu den singulären Punkten der Gleichung (G.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln $0, \frac{1}{2}$ haben, so folgt aus No. 1, dass die Gleichung (G.) dann und nur dann ein Integral der Form

$$(3.) \qquad u = G^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}$$

hat, wenn G eine ganze rationale Function ist mit der Eigenschaft, dass [22] für jeden Nullwerth b von G

$$(F'.) \qquad G'(b)^2R(b) = -\lambda, \qquad G'(z) = \frac{dG(z)}{dz},$$

und

$$(C'.) \quad H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Ist λ von Null verschieden, so ist demnach $G(z)$ durch keinen quadratischen Factor theilbar und für die Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ von Null verschieden.

Ist dagegen $\lambda = 0$, so ist $G(z)$ für $z = b$ Null zweiter oder erster Ordnung, je nachdem $R(b)$ von Null verschieden oder gleich Null ist. Ist $R(b)$ von Null verschieden, so ist

$$(F''.) \qquad \frac{G^{(2)}(b)}{G^{(1)}(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}, \qquad G^{(k)}(z) = \frac{d^kG(z)}{dz^k}.$$

[1]) S. 17 dieses Bandes. Sch.

Ist $\lambda = 0$, so wird die quadratische Form S. 116[1]), No. 13 Gl. (1.) meiner citirten Arbeit ein Quadrat, es genügt daher $\sqrt{G}$ der Gleichung (G.).

3.

Nach S. 129[2]), No. 21 meiner citirten Arbeit genügt $G(z)$ unter allen Umständen der Differentialgleichung:

$$\text{(H.)} \qquad R\frac{d^3w}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{1}{2}R'' + 4H\right]\frac{dw}{dz} + 2H'w = 0,$$

23] $$\frac{d^kR}{dz^k} = R^{(k)}, \qquad \frac{d^kH}{dz^k} = H^{(k)}.$$

Man gelangt daher auch auf folgendem Wege zur Bestimmung der Coefficienten von $H(z)$. Damit Gleichung (H.) durch eine ganze rationale Function $2n^{\text{ten}}$ Grades $G(z)$ befriedigt werde, setze man

$$G(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{2n} z^{2n}$$

in dieselbe ein. Es sind alsdann die $m + 2n - 2$ Gleichungen

$$\text{(J.)} \qquad \sum_0^m i\left[(l+3-i)(l+1)\left(l+2-\frac{1}{2}i\right)p_i + (4l+8-2i)A_{i-2}\right]c_{l+2-i} = 0$$

für $l = 0, 1, 2, \ldots, m+2n-3$ zu befriedigen, wo

$$R(z) = \sum_0^m i\, p_i z^i, \qquad H(z) = \sum_0^{m-2} i\, A_i z^i$$

gesetzt ist. Zwischen diesen Gleichungen eliminire man die Grössen $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$, und erhält für die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$, $m-2$ Gleichungen, wodurch sie sämmtlich als Functionen eines derselben, z. B. A_0, welcher willkürlich bleibt, sich ergeben.

Soll die Gleichung (G.) durch die Function $\sqrt{G}$ befriedigt werden, so 24] tritt zu den Gleichungen (J.) noch eine Gleichung hinzu, welche ausdrückt, dass $G(z)$ durch einen quadratischen Factor theilbar wird. Oder man substituire nach No. 2 in Gleichung (G.)

$$\sqrt{G} = (c_0' + c_1' z + \cdots + c_\mu' z^\mu)\sqrt{R_1(z)},$$

---

[1]) S. 82 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 46, 47 dieses Bandes. Sch.

wo $R_1(z)$ eine ganze rationale Function ν^{ten} Grades, welche nur für die Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ und für diese nur erster Ordnung verschwindet, und stelle die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten

$$c_0', c_1', \ldots, c_\mu', \quad A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$$

auf. Nach der einen oder der anderen Methode ergiebt sich eine algebraische Gleichung für den im allgemeinen Falle willkürlich verbleibenden Coefficienten A_0.

4.

Ist $G(z)$ durch keinen quadratischen Factor theilbar, und für die Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ von Null verschieden, so ist nach No. 2 λ von Null verschieden, und man erhält als Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (G.)

$$\text{(K.)} \qquad u_1 = G^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}}, \qquad u_2 = G^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}}.$$

Bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Wurzeln der Gleichung $G(z) = 0$ und setzen

$$\text{(1.)} \qquad G'(b_i)\sqrt{R(b_i)} = \varepsilon_i\sqrt{-\lambda},$$

so ist nach No. 2 $\varepsilon_i = \pm 1$ und $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}$ ein ABELsches Integral dritter [25 Gattung und für $z = b_i$ unendlich wie $\frac{1}{2}\varepsilon_i \log(z - b_i)$. Durch Einführung der ABELschen Functionen lassen sich daher y_1, y_2 durch Thetafunctionen mit ϱ Argumenten darstellen, wenn $m = 2\varrho + 1$ oder $2\varrho + 2$ ist.

Indem wir uns die Ausführung dieser Rechnung, so wie die eingehendere Untersuchung des Falles $\lambda = 0$, welcher sich auf die von Herrn HEINE den LAMÉschen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegten Differentialgleichungen bezieht, vorbehalten, beschränken wir uns gegenwärtig auf den speciellen Fall der LAMÉschen Differentialgleichung.

5.

Transformirt man die Gleichung (A.) durch die Substitution

$$\text{(1.)} \qquad \frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}, \qquad R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2),$$

so erhält man als besonderen Fall der Gleichung (G.)

$$(G'.) \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz}-[n(n+1)k^2z^2+h]u = 0.$$

Für diesen Fall genügt der Gleichung (H.) für jeden Werth von h eine ganze rationale Function von z, $G(z)$, $2n^{ten}$ Grades, der Form

$$(2.) \qquad G(z) = c_0+c_1z^2+c_2z^4+\cdots+c_nz^{2n}.$$

26] Das System der Gleichungen (J.) reducirt sich nämlich in diesem Falle auf die n folgenden:

$$(J'.) \quad \begin{cases} (2l+4)(2l+3)(2l+2)c_{l+2}-(2l+2)[(4l^2+8l+4)(k^2+1)+4h]c_{l+1} \\ \qquad +(2l+1)(2l-2n)(2l+2n+2)k^2c_l = 0 \end{cases}$$

für $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, während die Anzahl der Unbekannten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ gleich $n+1$.

Setzen wir

$$(3.) \qquad G(z) = (z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)\ldots(z^2-b_n^2),$$

$$(4.) \qquad z = \operatorname{sin am} x, \qquad b_i = \operatorname{sin am}\beta_i,$$

und drücken das Integral dritter Gattung $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ durch Thetafunctionen aus, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (1.) No. 4 nach Gleichung (K.) das folgende Fundamentalsystem der Gleichung (A.)

$$(K'.) \quad \begin{cases} y_1 = \prod_{l=1}^{l=n} e^{-\varepsilon_l x\frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}}\,\frac{H(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}H(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n} \\ y_2 = \prod_{l=1}^{l=n} e^{+\varepsilon_l x\frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}}\,\frac{H(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}H(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}. \end{cases}$$

27] 6.

Eine Ausnahme tritt nach No. 2 dann und nur dann ein, wenn die Gleichung (G'.) ein Integral von einer der Formen

$$(\alpha.) \quad f_{00} = F_{00}, \quad f_{10} = F_{10}\sqrt{1-z^2}, \quad f_{01} = F_{01}\sqrt{1-k^2z^2}, \quad f_{11} = F_{11}\sqrt{R(z)}$$

besitzt, worin $F_{\alpha\beta}$ eine ganze rationale Function von z vom Grade $n-\alpha-\beta$ bedeutet.

Setzen wir

$$F_{\alpha\beta} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_{n-\alpha-\beta} s^{n-\alpha-\beta},$$

so liefert die Substitution der Functionen (α.) in die Gleichung (G'.) zur Bestimmung der Grössen $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-\alpha-\beta}$ das System von Gleichungen

$$\text{(L.)} \qquad \begin{cases} (l+2)(l+1)c_{l+2} - [(l+\alpha)^2 + (l+\beta)^2 k^2 + h]c_l \\ \quad + k^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2} = 0 \end{cases}$$

für

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-\alpha-\beta+2,$$

worin α, β resp. durch die Combinationen 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1 zu ersetzen sind. Je nachdem $n-\alpha-\beta$ gerade oder ungerade, kann man die Coefficienten von c mit ungeradem oder geradem Index gleich Null wählen, und es verbleiben zur Bestimmung der übrigen $\frac{n-\alpha-\beta}{2}+1$, resp. $\frac{n-\alpha-\beta+1}{2}$ Grössen c ebenso viele Gleichungen. Setzt man die Determinante derselben gleich Null, so [28 erhält man eine algebraische Gleichung für h

$$\text{(M.)} \qquad \Psi(h) = 0,$$

welche im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, welche Lamé und Herr Heine als Bedingung für die Existenz ganzer Lösungen der Laméschen Differentialgleichung aufgestellt haben.

Es sei

$$\text{(1.)} \qquad n-\alpha-\beta = \mu,$$

so ist

$$\text{(2.)} \qquad F_{\alpha\beta} = (s^2-b_1^2)(s^2-b_2^2)\ldots(s^2-b_{\frac{\mu}{2}}^2)$$

oder

$$\text{(2a.)} \qquad F_{\alpha\beta} = s(s^2-b_1^2)(s^2-b_2^2)\ldots(s^2-b_{\frac{\mu-1}{2}}^2),$$

je nachdem μ gerade oder ungerade ist, worin die Grössen b_i von den Wurzeln der Gleichung $R(s) = 0$ verschieden sind.

Reducirt man das Integral $\int \frac{ds}{f_{\alpha\beta}^2\sqrt{R}}$ auf die Normalform, was am zweckmässigsten durch das bekannte Verfahren des Herrn Weierstrass geschieht (s. meine Arbeit B. 71 des Borchardtschen Journals[1]), No. 9), so ergiebt sich

[1]) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.

unter Berücksichtigung der Gleichung:

$$R(b_i)f''_{\alpha\beta}(b_i) + \tfrac{1}{2}R'(b_i)f'_{\alpha\beta}(b_i) = 0,$$

dass die Integrale dritter Gattung herausfallen (vergl. HEINE: Handbuch der Kugelfunctionen, p. 241 [1]).

Setzen wir nach geschehener Reduction

29] $$s = \sin\operatorname{am} x, \quad b_i = \sin\operatorname{am}\beta_i,$$

so ergeben die Gleichungen (E.), Gl. (1.) in No. 2 das folgende Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.)

$$\text{(N.)} \quad \begin{cases} y_1 = f_{\alpha\beta} = (\cos\operatorname{am} x)^\alpha(\Delta\operatorname{am} x)^\beta(\sin\operatorname{am} x)^\varepsilon \prod_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \dfrac{\mathrm{H}(x+\beta_i)\,\mathrm{H}(x-\beta_i)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}}, \\ y_2 = y_1\Big[\Big(\sigma - \tau\dfrac{J}{K}\Big)x + \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \omega_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x+\beta_i)\,\mathrm{H}(x-\beta_i) \\ \qquad\qquad - \varepsilon \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x) + \alpha\gamma \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x) + \beta\delta \mathrm{D}_x \log \Theta_1(x)\Big], \end{cases}$$

wo $\varepsilon = 0$ oder 1, je nachdem μ gerade oder ungerade,

$$\gamma = \frac{2}{R'(1)F^2_{\alpha\beta}(1)}, \qquad \delta = \frac{2}{kR'\left(\frac{1}{k}\right)F^2_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{k}\right)},$$

$$\sigma = -k^2 \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \frac{b_i^2}{f'_{\alpha\beta}(b_i)^2 R(b_i)} + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta,$$

$$\omega_i = -\frac{1}{R(b_i)f'_{\alpha\beta}(b_i)^2}, \qquad \tau = 2\sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \omega_i - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta.$$

30] Man hat für α, β die Combinationen 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1 zu setzen. Natürlich ist die letzte nur für $n \geqq 2$ möglich:

Ist z. B. $n = 1$, so ergeben die Gln. (J'.)

$$G(s) = \sin^2\operatorname{am} a - s^2,$$

wenn man mit Herrn HERMITE

$$h = -1 - k^2 + k^2\sin^2\operatorname{am} a$$

setzt. Die Gleichungen (K'.) werden:

$$y_1 = e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}, \qquad y_2 = e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}.$$

[1]) Zweite Auflage, Bd. I (1878), S. 386. Sch.

Nach Gleichung (L.) ist

1) für $\alpha = 0$, $\beta = 0$, die Gl. (M.): $h = -1-k^2$,

$$\mu = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad f_{00} = F_{00} = s,$$

die Gln. (N.):

$$y_1 = \sin \operatorname{am} x, \quad y_2 = \sin \operatorname{am} x \left[\frac{J}{K} x - \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x)\right];$$

2) für $\alpha = 1$, $\beta = 0$, die Gl. (M.): $h = -1$,

$$\mu = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{k'^2}, \quad \sigma = -\frac{k^2}{k'^2}, \quad \tau = -\frac{1}{k'^2},$$

$$f_{10} = \sqrt{1-s^2}, \quad F_{10} = 1,$$

die Gln. (N.):

$$y_1 = \cos \operatorname{am} x, \quad y_2 = \frac{1}{k'^2} \cos \operatorname{am} x \left[\frac{J-Kk^2}{K} x - \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x)\right], \qquad [31$$

3) für $\alpha = 0$, $\beta = 1$, die Gl. (M.): $h = -k^2$,

$$\mu = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = \frac{1}{k'^2}, \quad \sigma = \frac{1}{k'^2}, \quad \tau = \frac{1}{k'^2};$$

die Gln. (N.):

$$y_1 = \Delta \operatorname{am} x, \quad y_2 = \frac{1}{k'^2} \Delta \operatorname{am} x \left[\frac{K-J}{K} x + \mathrm{D}_x \log \Theta_1(x)\right],$$

Resultate, welche mit denen des Herrn HERMITE l. c., p. 826[1]) übereinstimmen.

7.

Während für ein willkürliches h die Gleichung (A.) durch ein Fundamentalsystem von Integralen (K'.) befriedigt wird, deren logarithmische Ableitung doppelt periodisch ist, findet dieses für diejenigen besonderen Werthe von h, für welche die Gleichung (G'.) durch eine Function der Form $f_{\alpha\beta}(z)$ befriedigt wird, nicht mehr statt, wie die Gln. (N.) zeigen. Man kann dieses aber auch a priori ohne Zuhülfenahme der Integrale (N.) erkennen. Es sei nämlich $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$, so kann zunächst $u_2 = u_1 \int \frac{dz}{u_1^2 \sqrt{R}}$ nicht algebraisch sein. Denn da die zu den singulären Punkten der Gleichung (G'.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln $0, \frac{1}{2}$ haben, so würde sich ein Integral u_2 ergeben der Form $u_2 = f_{\alpha'\beta'}(z)$, (s. meine Abh. B. 66 des BORCHARDTschen Journals[2]), No. 6 II), worin die Combination $\alpha'\beta'$ von der Com-

[1]) Hermite, Sur quelques applications etc., Paris 1885, S. 17. Sch.

[2]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

bination $\alpha\beta$ verschieden wäre. Dieses ist aber nicht möglich, denn da die 32] zum Punkte $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (G'.) die Wurzeln $-n$ und $n+1$ hat, und $f_{\alpha\beta}, f_{\alpha'\beta'}$ beide für $z = \infty$ unendlich n^{ter} Ordnung werden, so müsste $f_{\alpha'\beta'} = \text{const.} f_{\alpha\beta}$ sein.

Es seien nunmehr a, a' zwei beliebige singuläre Punkte der Gleichung (G'.), so gehört $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$ zu einer der Wurzeln $0, \frac{1}{2}$ der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, und es gehöre ein Integral u_2 resp. zu $\frac{1}{2}$ oder 0. Ferner sei η_{11}, η_{12} ein zu $0, \frac{1}{2}$ resp. gehöriges auf a' bezügliches Fundamentalsystem, so ist

$$u_1 = c_{11}\eta_{11} + c_{12}\eta_{12}, \quad u_2 = c_{21}\eta_{11} + c_{22}\eta_{12},$$

wo entweder $c_{11} = 0$ oder $c_{12} = 0$, weil $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$. Es sind aber wenigstens für irgend ein a' die Grössen c_{21}, c_{22} von Null verschieden, weil u_2 nicht algebraisch ist. Nach einem Umlaufe um a und a' gehen u_1, u_2 resp. über in

$$\frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{\Delta} u_1 - \frac{2c_{11}c_{12}}{\Delta} u_2, \qquad -\frac{2c_{21}c_{22}}{\Delta} u_1 + \frac{c_{21}c_{12} + c_{11}c_{22}}{\Delta} u_2,$$

wo $\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ von Null verschieden ist. Da c_{21}, c_{22} nicht verschwinden, so ist u_2 nicht in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergegangen, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, es ist, wenn man $u_2 = f(x)$ setzt, $D_x \log f(x)$ nicht periodisch, da ein Umlauf von z um zwei singuläre Punkte der Gl. (G'.) einer Vermehrung von x um eine der Perioden gleichkommt.

Heidelberg, 15. December 1877.

ANMERKUNG.

Der Gleichmässigkeit wegen wurde von der No. 5 (S. 155) ab für den Modul des elliptischen Gebildes k statt $\varkappa$, und von S. 158 ab für das Derivationszeichen D_x statt D gesetzt. SCH.

XXVIII.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES QUI ADMETTENT DES INTÉGRALES DONT LES DIFFÉRENTIELLES LOGARITHMIQUES SONT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, t. 4, 1878, p. 125—140.)

1.

Je me propose le problème de déterminer les coefficients de l'équation [125 différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_0 y = 0, \tag{1.}$$

de manière qu'elle soit satisfaite par un système fondamental d'intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ayant la propriété qu'en posant

$$y_i = f_i(x), \tag{2.}$$

$$\begin{cases} f_i(x+2K) &= \mu_i f_i(x) \\ f_i(x+2K'i) &= \mu_i' f_i(x) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m) \tag{3.}$$

et que les points singuliers de l'équation différentielle soient des pôles de ses intégrales.

On voit d'abord que les quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2K'i$. En posant dans l'équation différentielle y_i en lieu de y et en exprimant $p_{m-1}, p_{m-2}, \ldots, p_0$ au moyen des équations en nombre m, ainsi obtenues, on obtient (voir mon Mémoire, [126

t. LXVI du Journal de M. BORCHARDT[1]), no. 4) ces coefficients comme fonctions des quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$.

Donc ces coefficients sont des fonctions uniformes, doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2K'i$ qui ne deviennent infinies que de manière que leurs valeurs réciproques restent continues.

Comme les intégrales ne deviennent discontinues pour un point singulier a, que de manière qu'elles se transforment en fonctions holomorphes dans le voisinage de a, en les multipliant par une puissance déterminée de $x-a$, il s'ensuit (voir mon Mémoire, t. LXVI[1]), no. 4, et t. LXVIII[2]), no. 3, du Journal de M. BORCHARDT) qu'on a dans le voisinage de a

$$p_{m-i} = \frac{P_i}{(x-a)^i}, \tag{4.}$$

où P_i est holomorphe dans le même voisinage.

2.

Considérons en particulier l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_1\frac{du}{dx} + p_0 u = 0; \tag{A.}$$

on a, dans le voisinage d'un point singulier a,

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\alpha}{x-a} + q_1, \\ p_0 = \dfrac{\beta}{(x-a)^2} + \dfrac{\beta'}{x-a} + q_2, \end{cases} \tag{1.}$$

où α, β, β' sont des constantes et q_1, q_2 des fonctions holomorphes dans le voisinage de a; donc les fonctions doublement périodiques p_1, p_0 ne deviennent infinies pour $x = a$ que respectivement du premier et du second ordre.

Par suite, si l'on représente p_1 selon votre méthode (Note sur la théorie des fonctions elliptiques, ajoutée à la 6e édition du Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral de LACROIX), on obtient

$$p_1 = \gamma + \sum_k A_k \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_k), \tag{2.}$$

[1]) Mém. VI, t. I de cette édition, p. 159 et suiv. Sch.

[2]) Mém. VII, t. I de cette édition, p. 205 et suiv. Sch.

où le signe Σ se rapporte à tous les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ con- [127
tenus dans un parallélogramme de périodes et où γ signifie une constante, et où, de plus,

(3.) $$\sum_k A_k = 0.$$

Il s'ensuit

(4.) $$v = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} = e^{-\frac{1}{2}\gamma x} \prod_k [\mathrm{H}(x-a_k)]^{-\frac{1}{2}A_k}.$$

En posant

(5.) $$u = vy,$$

on a

(B.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = Py,$$

où

(6.) $$P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx} - p_0;$$

donc P est aussi une fonction uniforme doublement périodique qui devient infinie dans les points singuliers au plus de l'ordre 2, et si l'équation différentielle (A.) possède un système fondamental d'intégrales

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x),$$

avec la propriété indiquée par les équations (3.), no. 1, l'équation différentielle (B.) a aussi un tel système fondamental, puisque la fonction v satisfait aux équations (3.), no. 1, en ayant égard à l'équation (3.) de ce numéro. Donc nous pouvons nous restreindre à la recherche concernant l'équation différentielle (B.).

3.

Soit $F(x)$ une fonction uniforme satisfaisant aux équations

(1.) $$\begin{cases} F(x+2K) = \mu F(x), \\ F(x+2K'i) = \mu' F(x), \end{cases}$$

et qui ne devient infinie que d'ordre fini, $\mathrm{D}_x \log F(x)$ est uniforme doublement périodique et ne devient infini que du premier ordre.

Par suite on a, d'après votre mode de représentation, [128

(2.) $$\mathrm{D}_x \log F(x) = \delta + \sum_i r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i),$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros et les infinis de la fonction $F(x)$ contenus dans le parallélogramme des périodes, δ désignant une constante et

$$\sum_i r_i = 0. \tag{3.}$$

De l'équation (2.) il suit

$$F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod_i [\mathrm{H}(x-a_i)]^{r_i}, \tag{4.}$$

où le signe Π s'étend aussi aux mêmes zéros et infinis, δ' désignant une constante. La fonction $F(x)$ étant uniforme, les exposants r sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, selon que a correspond à un zéro ou un infini.

On a, dans le voisinage de a_k,

$$\delta + \sum_i r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) = \frac{r_k}{x-a_k} + \sum_i' r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(a_k-a_i) + \delta + \varphi(x), \tag{5.}$$

où le signe $\sum_i'$ s'étend à tous les a_i, excepté a_k, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe dans le voisinage de a_k et $\varphi(a_k) = 0$; donc, en posant

$$R_k = \sum_i' r_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(a_k-a_i) + \delta, \tag{6.}$$

il s'ensuit de l'équation (2.) que, dans le voisinage de a_k,

$$[\mathrm{D}_x \log F(x)]^2 = \frac{r_k^2}{(x-a_k)^2} + 2\frac{r_k R_k}{x-a_k} + \psi, \tag{7.}$$

où ψ est holomorphe dans le voisinage de a_k.

129] On a donc, d'après votre mode de réprésentation des fonctions doublement périodiques,

$$[\mathrm{D}_x \log F(x)]^2 = \varepsilon + \sum_i [2 r_i R_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) - r_i^2 \mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{H}(x-a_i)], \tag{8.}$$

ε étant constant. Il s'ensuit

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{F(x)} \mathrm{D}_x^2 F(x) &= \mathrm{D}_x^2 \log F(x) + [\mathrm{D}_x \log F(x)]^2 \\ &= \varepsilon + \sum_i [2 r_i R_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) + (r_i - r_i^2) \mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{H}(x-a_i)], \end{aligned} \right. \tag{9.}$$

d'où ce théorème:

Pour que l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Py \tag{B.}$$

soit satisfaite par une intégrale uniforme ayant les propriétés indiquées, il faut et il suffit que P ait la forme

$$(10.) \qquad P = \varepsilon + \sum_i [A_i \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x-a_i) + B_i \mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{H}(x-a_i)],$$

et

$$A_i = 2r_i R_i, \quad B_i = r_i - r_i^2,$$

r_i étant un nombre entier. On a alors

$$(11.) \qquad F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod_i [\mathrm{H}(x-a_i)]^{r_i} \prod_k \mathrm{H}(x-a_k'),$$

où le signe $\prod_k$ s'étend à toutes les valeurs a_k' pour lesquelles la fonction $F(x)$ s'annule, et pour lesquelles $r_k = 1$, $R_k = 0$: donc $A_k = 0$, $B_k = 0$. Pour ces valeurs a_k' la fonction P ne devient pas infinie; en désignant leur nombre par k, on a, d'après l'équation (3.),

$$(12.) \qquad k + r_1 + r_2 + \cdots = 0,$$

où $r_1, r_2, \ldots$ appartiennent à ceux des points a pour lesquels la fonction [130 P devient infinie.

4.

En supposant maintenant que l'équation différentielle (B.) ait une intégrale y_1 de la forme (11.) du numéro précédent,

$$(1.) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$$

est aussi une intégrale de la même équation. D'après le mode de représentation que vous venez de publier dans les Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 693 [1]), on a

$$(2.) \qquad \frac{1}{y_1^2} = \sum [Af(x-a) + A_1 \mathrm{D}_x f(x-a) + \cdots + A_r \mathrm{D}_x^r f(x-a)],$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros a de la fonction y_1, de manière que, d'accord avec la notation indiquée ci-dessus, y_1 devient nul de l'ordre r.

La quantité A est le coefficient de $(x-a)^{2r-1}$ dans le développement de $\frac{(x-a)^{2r}}{y_1^2}$ suivant les puissances de $x-a$.

L'intégrale y_2 se comporte dans le voisinage de a comme un logarithme, sinon $A = 0$.

1) Sur quelques applications etc., Paris 1885, p. 5. Sch.

Si l'on veut donc que y_2 soit aussi uniforme, on doit avoir, pour tous les zéros de y_1, $A = 0$; par suite on a

$$(3.) \qquad \frac{1}{y_1^2} = \sum [A_1 \mathrm{D}_x f(x-a) + \cdots + A_r \mathrm{D}_x^r f(x-a)];$$

donc y_2 a la forme

$$(4.) \qquad y_2 = y_1 \sum [A_1 f(x-a) + A_2 \mathrm{D}_x f(x-a) + \cdots + A_r \mathrm{D}_x^{r-1} f(x-a)],$$

et elle satisfait aux équations (1.), no. 3, et de plus y_1, y_2 font un système fondamental.

5.

Application au cas de l'équation différentielle de LAMÉ.

En supposant que dans l'équation différentielle (B.) la fonction P ne 131] devient infinie dans le parallélogramme des périodes que pour la valeur $x = 2K'i$ et en posant

$$(1.) \qquad \varepsilon = h + n(n+1)\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

$$(2.) \qquad A = 2rR = 0,$$

$$(3.) \qquad B = r - r^2 = -n(n+1),$$

l'équation différentielle devient, d'après une formule connue,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x + h]y;$$

c'est l'équation de LAMÉ sous la forme que vous lui avez donnée, p. 690 des Comptes rendus[1]).

On a, dans ce cas,

$$(4.) \qquad y_1 = F(x) = \frac{e^{\delta x + \delta'} \mathrm{H}(x-a_1')\mathrm{H}(x-a_2')\ldots\mathrm{H}(x-a_n')}{\Theta^n(x)},$$

les quantités a_1', a_2', ... dépendant essentiellement de la valeur de h.

Pour le cas spécial

$$(5.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x + k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a - 1 - k^2)y,$$

dont vous parlez dans votre Lettre du 27 octobre 1877[2]), on a $n = 1$, et

[1]) Sur quelques applications etc., Paris 1895, p. 1. Sch.

[2]) Voir p. 149 du présent volume. Sch.

(6.) $$y_1 = F(x) = e^{\delta x}\frac{\mathrm{H}(x-a')}{\Theta(x)}.$$

En posant cette valeur dans l'équation différentielle (5.), on déduit $a' = a$, $\delta = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$, et l'on parvient ainsi à l'intégrale que vous avez trouvée,

(7.) $$y_1 = F(x) = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

Une autre intégrale y_2, faisant un système fondamental avec y_1, se [134 trouve par l'équation

(8.) $$y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2}.$$

Pour l'évaluer on peut suivre le chemin que j'ai indiqué dans ma Lettre du 30 octobre[1]), mais on peut aussi exprimer $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, p. 693 des Comptes rendus[2]).

6.

En représentant $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, je vous demande de me permettre de faire auparavant une remarque à l'égard de votre fonction $f(x)$. Pour qu'on puisse représenter une fonction $F(x)$, devenant infinie pour un nombre infini de points du plan, par $f(x)$ et les dérivées de cette fonction, il faut que $f(x)$ jouisse de la même propriété.

Par là il est défendu que la quantité ω soit telle que

$$\mathrm{H}(x+\omega) = e^{\alpha x+\beta}\mathrm{H}(x),$$

où α, β sont des constantes. Cette équation n'est remplie que si

$$\omega = m\,2K + n\,2K'i,$$

où m et n sont des nombres entiers. Posons donc

(1.) $$\psi(x) = \frac{1}{y_1^2},$$

on a

(2.) $$\begin{cases} \psi(x+2K) = \mu\psi(x), \\ \psi(x+2K'i) = \mu'\psi(x), \end{cases}$$

1) Voir Mém. XXVI, p. 145 et suiv. du présent volume. Sch.

2) Sur quelques applications etc., Paris 1895, p. 5. Sch.

où

$$(3.)\qquad \begin{cases} \mu = e^{-4K\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}, \\ \mu' = e^{-2\frac{i\pi}{K}a - 4iK'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}. \end{cases}$$

[33] Pour exprimer $\psi(x)$ par votre formule, on doit poser, p. 692 des Comptes rendus[1]),

$$(4.)\qquad \begin{cases} \lambda = -2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}, \\ \omega = 2a. \end{cases}$$

Votre formule est donc applicable pour notre cas, excepté pour les valeurs de a que voici

$$(5.)\qquad a = mK + nK'i \quad (m, n \text{ nombres entiers}),$$

c'est-à-dire, comme $\Theta(a)$ ne doit pas être zéro, afin que sin am a entrant dans l'équation différentielle reste fini pour ces valeurs de a, pour lesquelles on a $H(a)H_1(a)\Theta_1(a) = 0$, ou

$$(5a.)\qquad \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a \Delta\operatorname{am} a = 0.$$

Mais si a n'appartient pas aux valeurs (5.), la fonction $\psi(x)$ est représentable par votre formule, et nous choisissons

$$(6.)\qquad f(x) = \frac{H'(0)}{H(2a)}\frac{H(x+2a)}{H(x)}e^{-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

La fonction $\psi(x)$ ne devient infinie dans un parallélogramme de périodes que pour le point $x = a$, et là elle devient infinie du second ordre. Le coefficient de $x-a$ dans le développement de $\psi(x)(x-a)^2$, selon les puissances de $x-a$, s'annule; par suite on a, d'après votre formule, p. 693 des Comptes rendus[2]),

$$(7.)\qquad \psi(x) = A_1 D_x f(x-a);$$

donc, à un facteur constant près,

$$(8.)\qquad y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2} = y_1 f(x-a) = \frac{H(x+a)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

comme vous avez trouvé aussi.

---

1) Sur quelques applications etc., Paris 1885, p. 3. Sch.

2) Ibid. p. 5. Sch.

Il suit du développement précédent qu'il y a une exception, si a appar- [134
tient aux valeurs (5.), mais aussi qu'il n'y a pas d'autre exception. Cela est d'accord avec ce que j'ai indiqué dans ma Lettre précédente[1]). Dans ce cas d'exception on doit, ou procéder comme je l'ai déjà fait dans ma Lettre, ou choisir une fonction $f(x)$ par laquelle soit représentable une fonction $F(x)$ jouissant de la propriété

$$F(x+2K) = \mu F(x),$$
$$F(x+2K'i) = \mu' F(x).$$

Voici maintenant avec plus de détails les calculs relatifs à ma Lettre du 30 octobre, pour l'évaluation de l'intégrale $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$.

Je pars de l'équation connue

$$(1.) \qquad \int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \Delta \operatorname{am} a}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} dx = -x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

qui vaut pour toutes les valeurs de a, excepté les valeurs

$$(2.) \qquad a = mK + nK'i \quad (m, n \text{ nombres entiers}).$$

Par la différentiation de l'équation (1.) on obtient

$$(3.) \qquad D_x \log \frac{H(x-a)}{H(x+a)} = -2\left[\frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \Delta \operatorname{am} a}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right],$$

de là

$$(4.) \qquad D_x\left[\log \frac{H(x-a)}{H(x+a)} + 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x\right] = -2 \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \Delta \operatorname{am} a}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

D'autre part on sait que

$$\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x = -\frac{\Theta^2(0) H(x+a) H(x-a)}{k \Theta^2(x) \Theta^2(a)};$$

donc l'équation (4.) devient [135

$$D_x \log\left[\frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x}\right] = 2k' \frac{H(a) H_1(a) \Theta_1(a)}{\Theta(a) \Theta^2(0)} \frac{\Theta^2(x)}{H(x+a) H(x-a)}.$$

Multipliant les deux membres par

$$\frac{H(x-a)}{H(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x},$$

[1]) Mém. XXVI, p. 145 et suiv. du présent volume. Sch.

il suit

$$(5.)\qquad \mathrm{D}_x\left[\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = \text{const.}\frac{\Theta^2(x)e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}}{\mathrm{H}^2(x+a)} = \frac{\text{const.}}{y_1^2}.$$

De cette équation on déduit

$$\frac{y_2}{y_1} = \int\frac{dx}{y_1^2} = \text{const.}\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)}e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

par suite, à un facteur constant près,

$$(6.)\qquad y_2 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

L'équation (1.) est en défaut, si l'on attribue à la quantité a une des valeurs (2.).

Prenons $a = 0$, $a = K$, $a = K+iK'$: alors on a, à des facteurs constants près, respectivement

$$y_1 = \sin\mathrm{am}\,x,\quad y_1 = \cos\mathrm{am}\,x,\quad y_1 = \Delta\,\mathrm{am}\,x;$$

mais

$$\int\frac{dx}{\sin^2\mathrm{am}\,x} = \mathfrak{Z}x - \mathrm{D}_x\log\mathrm{H}(x),$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2\mathrm{am}\,x} = \mathfrak{Z}_1x - \mathrm{D}_x\log\mathrm{H}_1(x),$$

$$\int\frac{dx}{\Delta^2\mathrm{am}\,x} = \mathfrak{Z}_2x - \mathrm{D}_x\log\Theta_1(x),$$

136] $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ étant des constantes connues; donc, on a respectivement

$$y_2 = \mathfrak{Z}x\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{Z}_1x\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}_1'(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{Z}_2x\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta(x)},$$

Heidelberg, 16 novembre 1877.

A votre demande j'ajoute ici aujourd'hui un résumé bref des recherches que j'ai faites depuis que je vous adressai la lettre mentionnée dans cette Note et que j'ai publiées dans les Nouvelles de la Société royale de Göttingue (d. d. 15 décembre 1877[1]).

L'équation différentielle de LAMÉ et de même ces équations différentielles qui font base à la théorie des fonctions de LAMÉ d'ordre supérieur, introduites par M. HEINE, ne sont que des cas particuliers d'une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre, que j'ai traitées dans mon travail (Journal de M. BORCHARDT, t. LXXXI, p. 116—118[2]), no. 13), et que j'y ai intégrées au moyen d'intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

Dans la Note mentionnée insérée dans les Nouvelles de la Société royale de Göttingue, après avoir résumé dans le no. 1 le résultat principal du no. 13 de mon travail du t. LXXXI du Journal de M. BORCHARDT[2]), je fais voir dans le no. 2, au moyen de ce résultat, que, pour que l'équation spéciale

$$\text{(A.)} \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)u = 0,$$

où $R(z)$, $H(z)$ sont des fonctions rationnelles et entières respectivement du degré m et $m-2$, et $R'(z) = \frac{dR(z)}{dz}$, ait une intégrale de la forme

$$u = G^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

où G est une fonction rationnelle et entière et λ une constante, il faut [137 et il suffit que, pour tout zéro b de la fonction $G(z)$,

$$\text{(B.)} \qquad G'(b)^2 R(b) = -\lambda$$

et

$$\text{(C.)} \quad H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Si λ s'annule, $G(z)$ s'annule pour $z = b$ du premier ou du second ordre, selon que $R(b)$ est égal à zéro ou différent de zéro. Dans ce cas, si $R(b)$

---

[1]) Mém. XXVII, p. 151 et suiv. du présent volume. Sch.

[2]) Mém. XX, p. 32—34 du présent volume. Sch.

est différent de zéro, on a

$$\text{(B'.)} \qquad \frac{G'''(b)}{G''(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}.$$

Dans le no. 3 j'applique les résultats du no. 21 de mon Mémoire cité contenu dans le Journal de M. BORCHARDT, t. LXXXI, p. 129[1]), desquels il suit que $G(z)$ satisfait toujours à l'équation différentielle

$$\text{(D.)} \qquad R\frac{d^3\omega}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left[\frac{1}{2}R'' + 4H\right]\frac{d\omega}{dz} + 2H'\omega = 0,$$

au moyen de laquelle je détermine les coefficients de la fonction $G(z)$, et j'établis les conditions pour que l'équation (A.) ait une intégrale de la forme $G_1(z)\sqrt{R_1(z)}$, $G_1(z)$, $R_1(z)$ étant des fonctions rationnelles et entières dont la dernière ne s'annule que du premier ordre et seulement pour les racines de l'équation $R(z) = 0$.

Ayant ainsi trouvé $G(z)$, si $G(z)$ n'a aucun facteur quadratique, l'équation (A.) a un système fondamental d'intégrales

$$\text{(E.)} \qquad u_1 = G^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}, \qquad u_2 = G^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}.$$

Je démontre dans le no. 4 que l'intégrale $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ est une intégrale ABÉLienne de troisième espèce devenant infinie pour $z = b_i$ comme la fonction $\pm\frac{1}{2}\log(z-b_i)$. En me réservant l'évaluation de ces intégrales au moyen des 138] fonctions θ-ABÉLiennes, ainsi que la considération plus approfondie du cas $\lambda = 0$ à une autre occasion, je me restreins dans les numéros suivants au cas

$$\text{(A'.)} \qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)k^2z^2 + h]u = 0,$$

où

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

que l'on obtient en faisant dans l'équation de LAMÉ

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}.$$

En évaluant alors les intégrales (E.), je trouve, dans le no. 5, le système

[1]) Mém. XX, p. 46, 47 du présent volume. Sch.

fondamental d'intégrales de l'équation de LAMÉ

$$(F.)\qquad \begin{cases} y_1 = \prod_1^n e^{-\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \dfrac{H(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)} H(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \\ y_2 = \prod_1^n e^{+\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \dfrac{H(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)} H(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \end{cases}$$

en désignant par $b_l = \operatorname{sn} \operatorname{am} \beta_l$ l'une des racines de l'équation $G(s) = 0$ et en déterminant le signe de $\varepsilon_l = \pm 1$ par l'équation

$$G'(b_l)\sqrt{R(b_l)} = \varepsilon_l \sqrt{-\lambda}.$$

Il est remarquable que les cas d'exceptions s'offrent par la même méthode sans aucune difficulté. En effet, je démontre dans le no. 6 qu'il n'y a d'exception que quand l'équation (A'.) est satisfaite elle-même par une intégrale algébrique, c'est-à-dire pour les valeurs de h pour lesquelles on peut satisfaire au système d'équations linéaires suivantes:

$$(G.)\qquad \begin{cases} (l+2)(l+1)c_{l+2} - [(l+\alpha)^2 + (l+\beta)^2 k^2 + h]c_l \\ \qquad + k^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2} = 0, \end{cases}$$

pour

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-\alpha-\beta+2,$$

où α, β désignent l'un ou l'autre des nombres 0, 1. Selon que $n-\alpha-\beta$ [139 est pair ou impair, on peut poser les coefficients d'indices impairs ou pairs égaux à zéro, et l'élimination des quantités c restantes conduit à une équation algébrique

$$(H.)\qquad \Psi(h) = 0,$$

pour déterminer la quantité h. Les intégrales de l'équation de LAMÉ se trouvent dans ce cas comme voici:

En posant $n-\alpha-\beta = \mu$, on a

$$(I.)\qquad \begin{cases} y_1 = (\operatorname{cn} \operatorname{am} x)^\alpha (\Delta \operatorname{am} x)^\beta (\operatorname{sn} \operatorname{am} x)^\varepsilon \prod_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \dfrac{H(x+\beta_l) H(x-\beta_l)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}}, \\ y_2 = y_1 \Big[\Big(\sigma - \tau \dfrac{J}{K}\Big) x + \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \omega_l D_x \log H(x+\beta_l) H(x-\beta_l) \\ \qquad\qquad - \varepsilon D_x \log H(x) + \alpha\gamma D_x \log H_1(x) + \beta\delta D_x \log \Theta_1(x) \Big], \end{cases}$$

$b = \sin \operatorname{am} \beta_i$ étant racine de l'équation $F_{\alpha\beta}(z) = 0$, où $F_{\alpha\beta}(z)$ est une fonction rationnelle et entière du degré μ, dont les coefficients se déterminent par l'équation (G.).

Dans les formules (I.) on a $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, selon que μ est pair ou impair, et

$$\gamma = \frac{2}{R'(1)F_{\alpha\beta}^2(1)}, \qquad \delta = \frac{2}{kR'\left(\frac{1}{k}\right)F_{\alpha\beta}^2\left(\frac{1}{k}\right)},$$

$$\sigma = -k^2 \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \frac{b_l^2}{f'_{\alpha\beta}(b_l)^2 R(b_l)} + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta,$$

$$\omega_l = -\frac{1}{R(b_l)f'_{\alpha\beta}(b_l)^2}, \qquad \tau = 2\sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}} \omega_l - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta,$$

$$f_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(\sqrt{1-z^2})^\alpha (\sqrt{1-k^2z^2})^\beta.$$

140] Enfin j'explique, dans le no. 7, aussi par une autre méthode, en m'appuyant seulement sur les principes de la théorie des équations différentielles linéaires, sans recourir à l'évaluation des intégrales, pourquoi l'exception doit se présenter dans le cas indiqué.

Heidelberg, 31. janvier 1878.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 161, Gl. (1.) dreimal 1 statt i,
„ „ , Zeile 3 v. u. $2K'i$ statt $2Ki'$,
„ „ , „ 2 v. u. p_0 statt p,
„ „ , letzte Zeile en statt au,
„ 162, Gl. (4.) p_{m-i} statt p_i,
„ „ , Gln. (1.) und Zeile 6 v. u. p_0 statt p_2,
„ „ , Zeile 5 v. u. zweimal du statt de,
„ „ , Gl. (2.) } a_k statt a,
„ 163, Gl. (4.) }
„ „ , Zeile 14 v. u. y_2 statt y_1,
„ „ , „ 13 v. u. les équations statt l'équation,
„ „ , „ 11 v. u. à l'équation statt aux équations,
„ 164, Gl. (7.) $\frac{r_k^2}{(x-a_k)^2}$ statt $\frac{r_k^2}{(x-a)^2}$,
„ „ , Gl. (9.) hinter $\frac{1}{F'(x)} D_x^2 F(x) =$ statt $-$,
„ 165, Zeile 13 v. u. En supposant statt Supposant,
„ „ , Gl. (1.) $y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$ statt $\int \frac{dx}{y_1^2}$,
„ „ , Zeile 6 v. u. y_1 statt y,
„ „ , „ 5 v. u. notation statt signification und nul statt zéro,
„ 166, No. 4, Gl. (4.) D_x^{-1} statt D^{r-i},
„ „ , Zeile 11 des périodes statt de période,
„ „ , No. 5, Gl. (4.) im Nenner $\Theta^n(x)$ statt $\Theta(x)$,
„ „ , Gl. (5.) 1 statt i,
„ 168, Zeile 13 ou statt où,
„ „ , „ 9 v. u. périodes statt période,
„ „ , „ 8 v. u. du statt de,
„ 169, „ 2 aux valeurs statt à la valeur,
„ „ , Gl. (1.) Δ am a statt Δ am u,

S. 169, Gl. (3.) cos am a, Δ am a statt cos am u, Δ am u,
„ „ , Zeile 5 v. u. k statt K,
„ „ , „ 3 v. u. $2k'$ statt $-k_1$,
„ 171, „ 2 v. u. zweimal du statt de,
„ 173, „ 4 b_l, β_l statt b_i, β_i,
„ „ , Gl. (H.) Ψ statt ψ,
„ „ , Gl. (I.) J statt I,
„ 174, Zeile 1 sin am β_i statt sin β_i;
„ 166, No. 4, Gl. (4.) wurde nach y_1 das $\sum$-Zeichen und
„ 169, Gl. (4.) die eckige Klammer auf der linken Seite eingefügt. SCH.

XXIX.

SELBSTANZEIGE DER ABHANDLUNG: »SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, AUXQUELLES SATISFONT LES MODULES DE PÉRIODICITÉ DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DES DEUX PREMIÈRES ESPÈCES. EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. HERMITE. (BORCHARDTS JOURNAL DER MATHEMATIK, BD. 83, S. 13[1])«.

(Repertorium für reine und angewandte Mathematik, Bd. II, 1879, S. 235—240.)

---

1. [235

Der Verfasser behandelt zunächst nach den Principien seiner Abhandlung (BORCHARDTS Journal, Bd. 71, p. 91[2])) die beiden Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung als Functionen eines unbeschränkt veränderlichen Moduls k. Diese Functionen werden als Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher sie bekanntlich genügen, definirt. Es sei nämlich

$$k^2 = \frac{1}{u}$$

und es seien

$$v_{01},\ v_{02};\quad v_{11},\ v_{12};\quad v_{\infty 1},\ v_{\infty 2}$$

Fundamentalsysteme von Integralen der Differentialgleichung

$$2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0, \tag{A.}$$

---

1) Abh. XXIV, S. 85 dieses Bandes. Sch.

2) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.

welche resp. zu den singulären Punkten

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = \infty$$

236] gehören (im Sinne der Arbeit des Verfassers BORCHARDTS Journal, Bd. 66, p. 139[1]), so ergeben sich die folgenden gleichwerthigen Definitionen der Functionen K und K'

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_{11}, \qquad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\eta_{12},$$

(B.) $$\eta_{11} = -v_{12}, \qquad \eta_{12} = \pi v_{11},$$

(C.) $$\eta_{11} = \pi v_{\infty 1}, \qquad \eta_{12} = -v_{\infty 2},$$

(D.) $$\eta_{11} = \pi v_{01} + i v_{02}, \qquad \eta_{12} = v_{02}.$$

Diese Relationen werden unter Zuhülfenahme der Arbeit des Verfassers BORCHARDTS Journal, Bd. 75, p. 177[2]) nach den Principien seiner Arbeiten Bd. 66 und Bd. 71 desselben Journals[3]) entwickelt. Dieselben gewähren die Möglichkeit, den Verlauf der Functionen η_{11}, η_{12} für die ganze u-Ebene festzustellen. Es ergiebt sich danach, dass, wenn zu einem beliebigen u die Werthe η_{11}, η_{12} gehören, die Gesammtheit der zu demselben Werthe u gehörigen Werthe resp.

(E.) $$\lambda\eta_{11} + \mu i\eta_{12}, \quad \nu i\eta_{11} + \varrho\eta_{12}$$

sind, wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ reale ganze Zahlen sind, welche der Gleichung

(F.) $$\lambda\varrho + \mu\nu = 1$$

genügen.

Für die Function

$$\mathrm{H} = \frac{\eta_{12}}{\eta_{11}}$$

wird aus diesen Resultaten gefolgert, dass dieselbe für

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = \infty,$$

und für beliebige Wege, auf welchen u zu einem dieser Werthe gelangt, resp. die allgemeine Form:

$$\frac{\nu - \varrho}{\lambda - \mu} i, \quad \frac{\nu}{\lambda} i, \quad -\frac{\varrho}{\mu} i$$

---

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 179. Sch.

[2]) Abh. XIV, Band I dieser Ausgabe, S. 361 ff. Sch.

[3]) Abh. VI und VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. und S. 205 ff. Sch.

annimmt, demzufolge die Werthe der Function

$$q = e^{-\pi H}$$

für $u = 0$ und $u = 1$ und für beliebige Wege von u einen Modul gleich der Einheit besitzen, während der Modul von q für $u = \infty$ entweder verschwindet oder der Einheit gleich wird.

Es wird hierauf nachgewiesen, dass das Vorzeichen des realen Theiles von H für einen beliebigen Werth von u von dem Wege unabhängig ist, auf welchem man dahin gelangt. Insbesondere ist der reale Theil von H für einen beliebigen Punkt je einer der Umgebungen f_0, f_1, f_∞ der drei singulären Punkte $0, 1, \infty$ positiv oder Null, also der Modul von q kleiner oder gleich der Einheit, unabhängig von dem Wege, auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt.

Hat k einen bestimmten Werth, und werden K und K', wie es in der Theorie der elliptischen Functionen geschieht, als bestimmte Integrale [237 gegeben, und wird

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

gesetzt, so ist bekannt, dass der Modul von q kleiner ist als Eins. Dieser Satz ist jedoch nur ein besonderer Fall des in der vorliegenden Arbeit gegebenen, insofern hier K und K' als Functionen der unbeschränkt Veränderlichen k aufgefasst werden. Der Beweis des allgemeinen Satzes enthält aber zu gleicher Zeit einen neuen Beweis dieser Thatsache der Theorie der elliptischen Functionen, welche daselbst nach RIEMANN durch die Theorie der Integrale algebraischer Functionen hergeleitet wird.

Es wird hierauf u als Function von q betrachtet, und mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\text{(G.)} \qquad \frac{du}{dq} = -\frac{u(u-1)}{\pi^2 q}\eta_1^2$$

gezeigt, dass innerhalb eines um den Punkt $q = 0$ mit dem Radius gleich der Längeneinheit beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ u eine eindeutige und ausser für $q = 0$, wo $u = \infty$, im Innern überall stetige Function von q ist, und keinen Werth annimmt, für welchen η_1 verschwindet. Innerhalb $\mathfrak{K}$ gilt die

Gleichung

$$\frac{1}{u} = 16q + q^2\varphi(q), \tag{1.}$$

wo $\varphi(q)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von q fortschreitende Reihe darstellt.

Es ergiebt sich weiter die folgende merkwürdige Eigenschaft dieser Function. Wenn q von $q = 0$ ausgehend einen beliebigen Radius des Kreises $\mathfrak{K}$ durchläuft, so geht u von $u = \infty$ aus und gelangt schliesslich zu einem der Werthe $u = 0$, $u = 1$ gleichzeitig, wenn q die Peripherie von $\mathfrak{K}$ erreicht.

Hieraus wird gefolgert, dass eine stetige Fortsetzung des Integrals der Differentialgleichung (G.), welches für $q = 0$ unendlich wird, über die Peripherie von $\mathfrak{K}$ hinaus nicht möglich ist, und nachgewiesen, dass jedem endlichen oder unendlich grossen Werthe von u Werthe von q innerhalb $\mathfrak{K}$ oder auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ entsprechen.

Wird auch η_1 als Function von q aufgefasst, so ergiebt sich, dass η_1^2 innerhalb $\mathfrak{K}$ eine eindeutige, endliche und stetige Function von q ist, und dass η_1 von Null verschieden ist für alle Punkte des Innern von $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme von $q = 0$, dagegen unendlich für jeden Punkt der Peripherie von $\mathfrak{K}$, was auch so ausgedrückt werden kann, dass η_1 als Function von u nur für
238] $u = \infty$ verschwindet und für $u = 0$, $u = 1$ unendlich wird, für jeden Weg auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt ist.

Aus der Gleichung (1.) lässt sich der bekannte Ausdruck

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{4}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)\dots}{(1+q)(1+q^3)\dots} \tag{2.}$$

(Jacobi, Fundamenta p. 89[1])) herleiten.

Herr Hermite macht an dieser Stelle die folgende Anmerkung: N'y aurait-il point lieu d'observer qu'en faisant

$$x^2 = f(H)$$

il résulte de votre analyse que toutes les solutions de l'équation

$$f(H) = f(H_0)$$

[1]) Jacobis Werke, Bd. I (1881), S. 146. Sch.

sont données par la formule

$$H = \frac{\nu i + \varrho H_0}{\lambda + \mu i H_0},$$

en insistant sur l'extrème importance de ce résultat, pour la détermination des modules singuliers de M. KRONECKER, et en remarquant que les belles découvertes de l'illustre géomètre, sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, paraissent reposer essentiellement sur cette proposition, dont la démonstration n'avait pas encore été donnée?

Es werden ferner zwei Wege angegeben, um den Ausdruck von η_1 als Function von q gültig innerhalb $\mathfrak{K}$ herzuleiten. Es ergiebt sich hierbei die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots \tag{3.}$$

(JACOBI, Fundamenta p. 184[1]).

2.

Die beiden Perioden des elliptischen Integrals zweiter Gattung werden alsdann als Functionen der unbeschränkt veränderlichen Grösse k durch Vermittelung der bereits in ihrem Verhalten als Functionen von u erforschten Functionen η_{i_1}, η_{i_2} definirt. Es ergiebt sich nämlich, wenn man setzt

$$J = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_1, \qquad J' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_2,$$

$$\text{(H.)} \qquad \begin{cases} \zeta_1 = 2\psi(u)\dfrac{d\eta_{i_1}}{du} + u\eta_{i_1}, \\ \zeta_2 = 2\psi(u)\dfrac{d\eta_{i_2}}{du} + u\eta_{i_2}, \\ \psi(u) = u(u-1), \end{cases}$$

Gleichungen, aus welchen sich unmittelbar die LEGENDRESche Relation

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2}$$

ergiebt.

Die Function $q\zeta_1^2$ von q ist innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ eindeutig und continuirlich.

[1]) Jacobis Werke, Bd. I (1881), S. 235. Sch.

239] Die Functionen ζ_1, ζ_2 bilden ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$(I.) \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2u\frac{d\zeta}{du} - \frac{1}{2}\zeta = 0$$

(s. die bereits citirte Abhandlung Bd. 71, p. 91 [1]).

Sind wiederum

$$w_{01}, w_{02}; \quad w_{11}, w_{12}; \quad w_{\infty 1}, w_{\infty 2}$$

resp. die zu den singulären Punkten

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = \infty$$

gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen derselben, so ergiebt sich

$$(K.) \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \pi w_{01} + i w_{02}, & \zeta_2 = w_{02}, \\ \zeta_1 = -w_{12}, & \zeta_2 = \pi w_{11}, \\ \zeta_1 = \pi w_{\infty 1}, & \zeta_2 = -w_{\infty 2} \end{cases}$$

und für $u = 0$

$$\zeta_1 = 2i, \quad \zeta_2 = 2,$$

für $u = 1$

$$\lim \zeta_1 = -2 + 4\log 2 - \lim \log(u-1), \quad \zeta_2 = \pi,$$

für $u = \infty$

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \infty.$$

Es wird hierauf

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = Z, \quad e^{-\pi Z} = s$$

gesetzt.

Bedeutet alsdann Z_0 einen der Werthe von Z für ein beliebiges u, so sind die den verschiedenen Wegen von u entsprechenden Werthe von Z in der Form

$$\frac{\lambda + \mu i Z_0}{\nu i + \varrho Z_0}$$

enthalten. Insbesondere ist für $u = 0$

$$Z = -\frac{\lambda - \mu}{\nu + \varrho} i,$$

für $u = 1$

$$Z = \frac{\mu}{\varrho} i$$

---

[1]) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.

oder gleich einer Zahl, deren reeller Theil positiv und unendlich ist, endlich für $u = \infty$

$$Z = -\frac{\lambda}{\nu} i,$$

so dass die Moduln aller Werthe von s für $u = 0, 1, \infty$ der Einheit gleich werden, den Werth $s = 0$ für $u = 1$ ausgenommen.

Es wird hierauf gezeigt, dass der Modul von s in einem Punkte der Umgebung sowohl von $u = 0$ als von $u = \infty$ bald grösser bald kleiner als die Einheit werden kann, je nach dem Wege, auf welchem u zu einem dieser Punkte gelangt. Dagegen für die Punkte in der Umgebung von $u = 1$ ist der Modul von s für einen beliebigen Weg von u kleiner als die Einheit.

Es ergiebt sich analog der Gleichung (G.)

$$(G^1.) \qquad \frac{du}{ds} = \frac{(u-1)\zeta_3^2}{\pi^2 s}.$$

Ähnlich wie u als Function von q behandelt wurde, wird jetzt u als [240 Function von s untersucht. Diese Function erweist sich als eindeutig und stetig innerhalb eines mit dem Radius Eins um $s = 0$ beschriebenen Kreises $\mathfrak{P}$. Für keinen Werth innerhalb $\mathfrak{P}$ erlangt u einen Werth, für welchen ζ_3 verschwindet.

Die der Gleichung (1.) analoge Gleichung

$$(1^1.) \qquad u - 1 = e^{4\log 2 - 2} s + s^2 h(s)$$

stellt u als Function von s innerhalb $\mathfrak{P}$ dar, wo $h(s)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von s fortschreitende Reihe bedeutet.

Ähnlich wie für die Function H ergiebt sich, dass das Vorzeichen des realen Theiles von Z für einen beliebigen Werth von u unabhängig ist von den Umläufen, welche u um die Punkte

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = \infty$$

vollzogen hat, wenn es zu jenem Werthe gelangt.

Die durch die Gleichung

$$e^{-\pi Z} = s$$

definirte Function $u-1$ von s, welche für $s = 0$ verschwindet, und innerhalb $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung $(1^1.)$ dargestellt wird, kann auf stetige Weise über die

Peripherie von $\mathfrak{P}$ hinaus fortgesetzt werden. Die Werthe von u, welche den Werthen von s innerhalb $\mathfrak{P}$ entsprechen, erschöpfen nicht die ganze u-Ebene. Setzt man u über die Peripherie hinaus stetig fort, und verbleibt alsdann im Äusseren von $\mathfrak{P}$, so ist u eindeutig und stetig innerhalb eines Theiles der s-Ebene, welcher zwischen der Peripherie von $\mathfrak{P}$ und derjenigen eines concentrischen Kreises enthalten ist, dessen Radius einen beliebigen die Einheit überschreitenden Werth hat.

Heidelberg. L. FUCHS.

ANMERKUNG.

In Bezug auf die S. 180, Zeile 6—9 enthaltene Angabe vergl. die Anmerkung zu der Abh. XXIV, S. 114 ff. dieses Bandes. SCH.

XXX.

ÜBER EINE KLASSE VON FUNCTIONEN MEHRERER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN ENTSTEHEN.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1880, Nr. 3, 25. Februar 1880, Sitzung am 7. Februar; S. 170—176.)

Der königlichen Societät beehre ich mich von dem Inhalt einer Ar- [170
beit Kenntniss zu geben, welche ich zu veröffentlichen im Begriffe bin.

Gleich wie diejenigen Functionen mehrerer Variabeln, welche man ABEL-sche Functionen nennt, den Integralen algebraischer Functionen ihre Entstehung verdanken, indem man nach dem Vorgange von JACOBI die oberen Grenzen von p Integralen einer geeigneten algebraischen Function als Function von der Summe dieser Integrale und von $p-1$ anderen ähnlich gebildeten Summen auffasst, ebenso entsteht, wie ich in dieser Arbeit zeige, eine neue Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, wenn man die Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zu Grunde legt.

Ich habe mir zunächst die Aufgabe gestellt, die Beschaffenheit der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung zu untersuchen, wenn durch die m Gleichungen

$$\sum_1^m{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ Constanten, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ ein Fundamentalsystem [171

von Lösungen der Differentialgleichung bedeutet, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ als analytische Functionen der Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ definirt werden sollen.

Ich habe diese Aufgabe für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchgeführt, und bin zu den folgenden Resultaten gekommen.

1.

Es sei die gegebene Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

worin P, Q rationale Functionen von z; $f(z)$, $\varphi(z)$ sei ein willkürliches Fundamentalsystem von Lösungen dieser Gleichung.

Es mögen z_1, z_2 als Functionen der Variabeln u_1, u_2 durch die Gleichungen

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2 \end{cases}$$

definirt werden.

Sind z_1, z_2 analytische Functionen von u_1, u_2, und setzen wir

$$z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2),$$

so ergiebt sich zunächst die folgende Eigenschaft dieser Functionen

172] (C.) $$\begin{cases} F_1[\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c] = F_1(u_1, u_2), \\ F_2[\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c] = F_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

worin c eine Constante, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ die Elemente einer Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

bedeuten, welche auf $f(z)$, $\varphi(z)$ durch einen Umlauf der Variablen z ausgeübt wird, und γ_1, γ_2 bestimmte diesem Umlaufe zugehörige Grössen sind.

Die Functionen F_1, F_2 nehmen ausserdem im Allgemeinen für noch unzählig viele andere Werthsysteme u_1, u_2 dieselben Werthe wieder an.

2.

Ist a_i ein singulärer Punkt der Gleichung (A.), sind $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, sind ferner s_1, s_2 die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so bestimme ich zunächst diese Wurzeln so, dass wenn u_1, u_2 Werthe erreichen, für welche von den Werthen a, b die resp. die Grössen z_1, z_2, annehmen, entweder einer mit einem singulären Punkte coincidirt, oder beide mit zwei von einander verschiedenen singulären Punkten, ohne dass jedoch die Gleichung

$$\text{(D.)} \qquad \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)} - \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = 0$$

durch $z_1 = a$, $z_2 = b$ befriedigt wird, die Ableitungen $\frac{\partial z_a}{\partial u_i}$ in der Umge- [173
bung von $z_1 = a$, $z_2 = b$ holomorphe Functionen von z_1, z_2 sind.

Hierbei ist der unendlich ferne Punkt unter die singulären Punkte mit inbegriffen.

Die Bestimmung soll überdiess so getroffen werden, dass für endliche Werthsysteme u_1, u_2 die angegebenen Werthe von z_1, z_2 auch erreichbar sind.

Es ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass

$$\text{(E.)} \quad \begin{cases} r_1^{(i)} = -1 + \frac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1 + \frac{k_i}{n_i}, \quad k_i > 1, \quad k_i, n_i \text{ ganze positive Zahlen;} \\ s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad s_2 = 1 + \frac{k}{n}, \quad k > 1, \quad k, n \text{ ganze positive Zahlen.} \end{cases}$$

Ich zeige alsdann, dass die Grössen $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, s_1, s_2$ weiter so bestimmt werden können, dass durch die Gleichung

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

z als eindeutige Function von ζ definirt wird, und demnach die Gleichung (D.) nur für $z_2 = z_1$ befriedigt werden kann. Es ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass entweder

$$r_2^{(i)} = r_1^{(i)} + 1$$

oder [174

$$k_i = 2$$

und entweder $s_2 = s_1 + 1$ oder

$$s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad s_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

mit dem Hinzufügen, dass die Entwickelung eines Integrals der Gleichung (A.) in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen enthalte.

Ich beweise hierauf, dass wenn

$$(G.)\quad \begin{cases} r_1^{(i)} = -1+\dfrac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1+\dfrac{2}{n_i} \quad \text{oder} \quad r_1^{(i)} = -\dfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = +\dfrac{1}{2}, \\ s_1 = \dfrac{3}{2} \quad \text{und} \quad s_2 = \dfrac{5}{2} \quad \text{oder} \quad s_1 = 1+\dfrac{1}{n}, \quad s_2 = 1+\dfrac{2}{n} \end{cases}$$

mit dem Hinzufügen, dass die Entwickelung eines Integrals der Gleichung (A.) in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen enthält, z_1, z_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten eindeutige analytische Functionen von u_1, u_2.

175] 3.

Es wird hierauf nachgewiesen, dass die Anzahl ϱ der endlichen singulären Punkte der Gleichung (A.) nicht grösser sein kann als sechs, wenn die Bedingungen (G.) erfüllt sein sollen.

Ich hebe alsdann das Beispiel

$$\varrho = 6, \quad r_1^{(i)} = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = \tfrac{1}{2}$$

hervor und zeige, dass in diesem Falle die Gleichung (A.) durch ein Fundamentalsystem

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{R(z)}}, \qquad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

wo

$$R(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_6),$$

$g(z)$, $h(z)$ ganze rationale Functionen von nicht höherem als dem ersten Grade, befriedigt wird. In diesem Falle coincidiren die Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ mit den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Hierauf weise ich nach, dass im Allgemeinen die Gleichung (A.) unter den Bedingungen (G.) nicht algebraisch integrirbar sei, und demgemäss im Allgemeinen unsere Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ von den ABELschen Functionen verschieden sind.

Ich wähle hierzu das mit den Bedingungen (G.) verträgliche Beispiel:

Anzahl der endlichen singulären Punkte $\varrho = 2$,

$$r_1^{(1)} = -\tfrac{2}{3},\quad r_2^{(1)} = -\tfrac{1}{3},\quad r_1^{(2)} = -\tfrac{5}{6},\quad r_2^{(2)} = -\tfrac{4}{6},\quad s_1 = \tfrac{3}{2},\quad s_2 = 2$$

und beweise, dass das allgemeine Integral der Gleichung (A.) in diesem [176 Falle nicht algebraisch ist.

Zum Schluss bemerken wir, dass die Gleichungen (B.) durch die eindeutige, im Allgemeinen nicht rationale Substitution (F.) unter Voraussetzung der Bedingungen (G.) in ähnliche Gleichungen transformirt werden, in welchen $f(z)$ und $\varphi(z)$ durch Quadratwurzeln eindeutiger im Allgemeinen nicht rationaler Functionen von ζ ersetzt werden, während ζ an die Stelle von z als Integrationsvariable eintritt.

Heidelberg, 4. Februar 1880.

ANMERKUNG.

Die in dem einleitenden Satze S. 185 erwähnte Arbeit, von welcher die vorstehende Note einen Auszug giebt, ist die folgende Abh. XXXI; auf die Verallgemeinerung des JACOBIschen Umkehrungsproblems beziehen sich ferner noch die Abhandlungen XXXII—XXXVI, XXXVIII, XLI, XLIX, L und LI dieses Bandes.

Vergl. im übrigen die Anmerkungen zu den Abhandlungen XXXI und XXXIV dieses Bandes.

SCH.

XXXI.

ÜBER EINE KLASSE VON FUNCTIONEN MEHRERER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN ENTSTEHEN.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 89, 1880, S. 151—169.)

Gleichwie diejenigen Functionen mehrerer Variabeln, welche man [151 ABELsche Functionen nennt, den Integralen algebraischer Functionen ihre Entstehung verdanken, indem man nach dem Vorgange von JACOBI die oberen Grenzen von p Integralen einer geeigneten algebraischen Function als Functionen von der Summe dieser Integrale und von $p-1$ anderen ähnlich gebildeten Summen auffasst, ebenso entsteht, wie ich in der folgenden Arbeit zeige, eine neue Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, wenn man die Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zu Grunde legt.

Ich habe mir zunächst die Aufgabe gestellt, die Beschaffenheit der Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung zu untersuchen, wenn durch die m Gleichungen

$$\sum_{i}^{m} \int_{\zeta_i}^{z_i} f_\alpha(z)\, dz = u_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ Constanten, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung bedeutet, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ als analytische Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ definirt werden sollen.

Ich habe diese Aufgabe für Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchgeführt, und erlaube mir in dem Folgenden die Resultate, zu welchen ich gelangt bin, mitzutheilen.

Für die weitere Behandlung der hier definirten Functionen, namentlich für ihre analytische Darstellung, werden diejenigen Relationen, welche ich in meiner in diesem Journal Bd. 76 p. 177[1]) enthaltenen Arbeit für die 152] zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen der linearen Differentialgleichungen entwickelt habe, heranzuziehen sein.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit habe ich am 4ten gegenwärtigen Monats der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt[2]).

1.

Es mögen die Integrale der Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

in welcher die Coefficienten P, Q rationale Functionen von z, für jeden singulären Punkt a die Eigenschaft haben, mit einer Potenz von $z-a$ multiplicirt, für $z = a$ weder Null noch unendlich zu werden (siehe meine Abhandlung Bd. 66 dieses Journals p. 146[3]).

Es sei

$$y_1 = f(z), \quad y_2 = \varphi(z)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.), so sind

$$w_1 = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz, \qquad w_2 = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

wo z_0 einen willkürlichen Werth bezeichnet, und eine Constante, welche wir gleich c setzen wollen, ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$\text{(A'.)} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + P\frac{d^2w}{dz^2} + Q\frac{dw}{dz} = 0.$$

Eine Änderung des Integrationsweges möge w_1, w_2 resp. in w_1', w_2' überführen,

---

1) Abh. XVI, Band I dieser Ausgabe, S. 415 ff. Sch.

2) Siehe die vorhergehende Abh. XXX. Sch.

3) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186, 187. Sch.

so ist

$$(1.) \qquad \begin{cases} w_1' = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \beta_1 c, \\ w_2' = \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \beta_2 c, \end{cases}$$

wo $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ Constanten bedeuten.

Dieselbe Änderung des Weges führt y_1, y_2 resp. in y_1', y_2' über, wo

$$(2.) \qquad \begin{cases} y_1' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y_2' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2. \end{cases}$$

Wir definiren nunmehr durch die Gleichungen

$$(B.) \qquad \begin{cases} \int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2, \end{cases}$$

worin ζ_1, ζ_2 beliebige aber feste von den singulären Punkten [153 der Gleichung (A.) verschiedene Werthe sind, und zugleich $f(\zeta_1), f(\zeta_2), \varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)$ gegebene Werthe haben, z_1, z_2 als Functionen von u_1, u_2 und untersuchen, welche Eigenschaften $f(z), \varphi(z)$ haben müssen, damit z_1, z_2 bestimmte analytische Functionen der genannten Variabeln werden.

Die dieselben Werthe von z verbindenden Integrationswege denken wir uns in beiden Gleichungen übereinstimmend.

Von jedem der singulären Punkte der Gleichung (A.) $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ sei ein beliebiger Schnitt bis ins Unendliche gezogen. Der zu a_i gehörige Schnitt soll mit q_i bezeichnet werden. Die Schnitte sollen weder sich selbst noch einer den anderen schneiden. Die so zerschnittene Ebene der complexen Variabeln z soll mit T' bezeichnet werden. Überschreiten die sämmtlichen Integrale in (B.) denselben Schnitt q_i gleich oft und in gleicher Richtung, so verwandelt eine Änderung des Integrationsweges u_1 in $\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \beta_1 c$, u_2 in $\alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \beta_2 c$, wenn dieser Änderung des Weges die auf y_1, y_2 angewendete Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

entspricht. Die Grössen β_1, β_2 haben bestimmte Werthe, wenn die Änderung des Integrationsweges eine bestimmte ist.

Es sei nunmehr

$$(C.) \qquad z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2),$$

so haben die Functionen F_1, F_2 die Eigenschaft

$$(D.) \qquad \begin{cases} F_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \beta_2 c) = F_1(u_1, u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \beta_2 c) = F_2(u_1, u_2). \end{cases}$$

Die Functionen F_1, F_2 nehmen ausserdem im Allgemeinen für noch unzählig viele andere Werthe von u_1, u_2 dieselben Werthe wieder an, wie daraus hervorgeht, dass man den Integrationsweg von ζ_2 nach z_2 oder den von ζ_1 nach z_1 ungeändert lassen kann, während man den anderen Integrationsweg variirt.

2.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die Gleichung (A.) nur wesentlich singuläre Punkte besitze, d. h. dass die Coefficienten derselben nur für solche [154] Punkte unendlich werden, in welchen das allgemeine Integral entweder unstetig wird oder eine Verzweigung erleidet. Die Wurzeln der zu diesen einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen seien reale und rationale Zahlen und ausserdem in Übereinstimmung mit meiner Abhandlung Bd. 76 dieses Journals p. 184[1]) von einander verschieden, negativ und absolut kleiner als Eins.

Dagegen seien die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschiedene, reale und rationale Zahlen, welche die positive Einheit übersteigen.

Alsdann werden in Gleichung (B.) für endliche Werthe u_1, u_2 die Grössen z_1, z_2 mit singulären Punkten der Gleichung (A.) oder mit dem unendlich fernen Punkte coincidiren können.

Die Functionen z_1, z_2 der unabhängigen Variabeln u_1, u_2, welche durch die Gleichungen (B.) definirt werden, genügen den Differentialgleichungen

$$(E.) \qquad \begin{cases} \Delta . dz_1 = \quad \varphi(z_2)\, du_1 - f(z_2)\, du_2, \\ \Delta . dz_2 = -\varphi(z_1)\, du_1 + f(z_1)\, du_2, \end{cases}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix}.$$

Wenn u_1, u_2 von den Werthen 0, 0 ausgehend auf willkürlichen von einander

[1]) Abh. XVI, Band I dieser Ausgabe, S. 422. Sch.

unabhängigen Wegen fortgehen, so werden nach den von den Herren BRIOT und BOUQUET entwickelten Principien (cf. Bulletin des Sciences mathématiques t. III, p. 265, und BRIOT, Théorie des fonctions ABÉLiennes, p. 79) z_1, z_2 von den Werthen ζ_1, ζ_2 ausgehend auf entsprechenden Bahnen sich stetig fortsetzen und in der Umgebung der durchlaufenen Werthe von u_1, u_2 holomorph sein, bis z_1, z_2 entweder unendlich geworden oder zu solchen Werthen gelangt sind, für welche $\frac{f(z_1)}{\Delta}, \frac{f(z_2)}{\Delta}, \frac{\varphi(z_1)}{\Delta}, \frac{\varphi(z_2)}{\Delta}$ nicht sämmtlich endliche und bestimmte Werthe erhalten.

Letzterer Umstand könnte nur eintreten, wenn entweder z_1 oder z_2 oder beide Grössen sich einem singulären Punkte der Gleichung (A.) oder dem unendlich fernen Punkte annähern, oder wenn dieselben Grössen Werthe annehmen, welche die Gleichung $\Delta = 0$ befriedigen.

3.

Es möge zunächst für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, z_1 mit einem singulären Punkte a der Gleichung (A.), z_2 aber mit einem nicht singulären im Endlichen befindlichen Punkte b coincidiren, ohne dass jedoch $z_1 = a$, $z_2 = b$ der [155 Gleichung

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$$

genügen.

Wir setzen

$$z_1 - a = w_1, \quad z_2 - b = w_2,$$

alsdann ist nach meiner Abhandlung Bd. 66 dieses Journals p. 139[1]) in der Umgebung von a

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} f(z_1) = c_{11} w_1^{r_1} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_2} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21} w_1^{r_1} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_2} g_2(w_1), \end{cases}$$

wo r_1, r_2 die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ Constanten, $g_1(w_1), g_2(w_1)$ in der Umgebung von a holomorph und $g_1(0), g_2(0)$ von Null verschieden sind.

Dagegen hat man in der Umgebung von $z_2 = b$

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} f(z_2) = \gamma_0 + \gamma_1 w_2 + \gamma_2 w_2^2 + \cdots, \\ \varphi(z_2) = \gamma_0' + \gamma_1' w_2 + \gamma_2' w_2^2 + \cdots, \end{cases}$$

wo γ_i, γ_i' bestimmte Constanten.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 179. Sch.

Es wird daher

$$\Delta = w_1^{r_1} G_1(w_1, w_2) + w_1^{r_2} G_2(w_1, w_2), \tag{3.}$$

wo G_1, G_2 in der Umgebung von resp. 0, 0 holomorphe Functionen von w_1, w_2 bedeuten.

Es sei $r_2 > r_1$.

Da $z_1 = a$, $z_2 = b$ nicht der Gleichung (F.) genügen, so muss

$$G_1(0,0) = g_1(0)[c_{11}\gamma_0' - c_{21}\gamma_0]$$

von Null verschieden sein.

Demnach ist

$$\Delta w_1^{-r_1} \quad \text{für} \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0$$

endlich und von Null verschieden.

Nun sei nach voriger Nummer

$$r_1 = -\frac{k_1}{n}, \qquad r_2 = -\frac{k_2}{n},$$

wo k_1, k_2, n positive ganze Zahlen bedeuten, wovon die beiden ersteren kleiner sind als n, und es werde

$$w_1 = t^n$$

156] gesetzt, so verwandeln sich die Gleichungen (E.) in

$$\text{(4.)} \quad \begin{cases} nt^{n-1}\Delta dt = \varphi(w_2 + b)\, du_1 - f(w_2 + b)\, du_2, \\ \Delta dw_2 = -[c_{21} t^{-k_1} g_1(t^n) + c_{22} t^{-k_2} g_2(t^n)]\, du_1 + [c_{11} t^{-k_1} g_1(t^n) + c_{12} t^{-k_2} g_2(t^n)]\, du_2. \end{cases}$$

Setzen wir demnach voraus, dass

$$k_1 \geqq n-1,$$

d. h. weil $k_1 < n$

$$k_1 = n-1, \tag{5.}$$

so sind die aus den Gleichungen (4.) sich ergebenden Werthe von

$$\frac{\partial t}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial t}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial u_2}$$

in der Umgebung von $t = 0$, $w_2 = 0$ holomorphe Functionen von t, w_2.

Es sind demnach z_1 und z_2 in der Umgebung der Werthe $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ holomorphe Functionen von u_1, u_2.

4.

Es möge nunmehr für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ werden, wo a_1 und a_2 von einander verschiedene singuläre Punkte der Gleichung (A.) sind, ohne dass jedoch $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ der Gleichung (F.) genügen.

Seien r_{11}, r_{12} die Wurzeln der zu a_1 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, r_{21}, r_{22} diejenigen der zu a_2 gehörigen, so setzen wir in Übereinstimmung mit den beiden vorigen Nummern

$$(1.)\qquad \begin{cases} r_{11} = -1 + \dfrac{1}{n_1}, \qquad r_{12} = -1 + \dfrac{l_1}{n_1} \\ r_{21} = -1 + \dfrac{1}{n_2}, \qquad r_{22} = -1 + \dfrac{l_2}{n_2} \\ l_1,\ l_2,\ n_1,\ n_2 \text{ positive ganze Zahlen}, \quad l_1 > 1, \quad l_2 > 1. \end{cases}$$

Man hat, wenn wieder

$$z_1 - a_1 = w_1, \quad z_2 - a_2 = w_2$$

gesetzt wird, wie in Nummer 3, Gleichung (1.)

$$(2.)\qquad \begin{cases} f(z_1) = c_{11} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ f(z_2) = e_{11} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{12} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \\ \varphi(z_2) = e_{21} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{22} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \end{cases}$$

wo $c_{11}, \ldots, c_{22}$, $e_{11}, \ldots, e_{22}$ Constanten, $g_1(w_1)$, $g_2(w_1)$, $h_1(w_2)$, $h_2(w_2)$ in der Umgebung von resp. $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ holomorphe Functionen sind, welche resp. für $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ von Null verschieden werden. Es erhält [157 jetzt Δ die Form

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Delta = w_1^{r_{11}} w_2^{r_{21}} G_{11}(w_1, w_2) + w_1^{r_{11}} w_2^{r_{22}} G_{12}(w_1, w_2) \\ \quad + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{21}} G_{21}(w_1, w_2) + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{22}} G_{22}(w_1, w_2), \end{cases}$$

wo die Functionen $G_{ik}(w_1, w_2)$ in der Umgebung von $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ holomorphe Functionen von w_1, w_2 sind.

Nun ist

$$G_{11}(0, 0) = [c_{11} e_{21} - e_{11} c_{21}]\, g_1(0)\, h_1(0)$$

von Null verschieden, weil sonst die Gleichung (F.) durch $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ befriedigt werden müsste, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Demnach ist

$$\Delta w_1^{-r_{11}} w_2^{-r_{21}} \quad \text{für} \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0$$

endlich und von Null verschieden.

Substituirt man in den Gleichungen (E.)

$$z_1 - a_1 = t_1^{n_1}, \quad z_2 - a_2 = t_2^{n_2},$$

so ergiebt sich demnach, dass $\frac{\partial t_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial t_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial t_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial t_2}{\partial u_2}$ in der Umgebung von $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ holomorphe Functionen von t_1, t_2 sind. Demnach sind t_1, t_2, folglich auch z_1, z_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ holomorphe Functionen von u_1, u_2.

Die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung für die Gleichung (A.) habe die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2. Es sei

$$\varrho_1 = \frac{s_1}{n}, \qquad \varrho_2 = \frac{s_2}{n};$$

wo n, s_1, s_2 ganze positive Zahlen und zwar $s_2 > s_1 > n$ (s. No. 2).

Wir setzen nunmehr voraus

$$s_1 = n + 1. \tag{4.}$$

Unter dieser Voraussetzung wird, wie in den Fällen der vorigen und dieser Nummer, bewiesen, dass z_1, z_2 eindeutig bleiben auch in der Umgebung solcher Werthe von u_1, u_2, für die $z_1 = \infty$ und z_2 in einen singulären Punkt a der Gleichung (A.) oder in einen nicht singulären Punkt a einrückt, wenn nur nicht die Gleichung (F.) durch das Werthenpaar $z_1 = \infty$, $z_2 = a$ befriedigt wird.

Fasst man die Resultate der vorigen und dieser Nummer zusammen, so erhält man den Satz:

158] Wenn für jeden singulären Punkt der Gleichung (A.) die Wurzeln r_1, r_2 der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die Form haben

$$\text{(G.)} \quad \begin{cases} r_1 = -1 + \dfrac{1}{n}, \qquad r_2 = -1 + \dfrac{l}{n} \quad (n \text{ und } l \text{ positive ganze Zahlen}), \\ l > 1, \end{cases}$$

während die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden

Fundamentalgleichung die Form haben

$$(G'.)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = 1+\dfrac{1}{n}, \quad \varrho_2 = 1+\dfrac{l}{n} \quad (n, l \text{ positive ganze Zahlen}), \\ l>1, \end{cases}$$

so sind z_1, z_2 eindeutige Functionen der Variabeln u_1, u_2 in der Umgebung aller derjenigen Werthe derselben, für welche z_1, z_2 nicht in solche Punkte einrücken, für welche die Gleichung (F.) erfüllt ist.

5.

Sind $f(z)$, $\varphi(z)$ zwei willkürliche Integrale der Gleichung (A.), so ist in der Umgebung eines singulären Punktes a

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(z) = c_{11}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{12}(z-a)^{r_2} g_2(z), \\ \varphi(z) = c_{21}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{22}(z-a)^{r_2} g_2(z), \end{cases}$$

worin r_1, r_2 die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, $r_2 > r_1$, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ von Null verschiedene Constanten, $g_1(z)$, $g_2(z)$ in der Umgebung von $z = a$ holomorphe Functionen und $g_1(a)$, $g_2(a)$ von Null verschieden.

Es wird in der gegenwärtigen Arbeit durchweg vorausgesetzt, dass die Entwickelung eines Integrals der Gleichung (A.) in der Umgebung eines singulären Punktes oder des Unendlichkeitspunktes keine Logarithmen enthält.

Setzen wir

$$(H.)\qquad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)},$$

so ist für $z = a$, $\zeta = \frac{c_{11}}{c_{21}}$, also endlich und von Null verschieden. Ebenso ergiebt sich, dass für $z = \infty$, ζ endlich und von Null verschieden.

Es soll in Gleichung (H.) z als Function von ζ definirt werden.

Es möge einem willkürlichen Werthe ζ_0 von ζ ein Werth $z = z_0$ zugehören. Setzt man von diesem Werthepaare ausgehend die Function z in der ζ-Ebene fort, so kann dieses mit Hülfe der Gleichung

$$(J.)\qquad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\varphi(z)^2}{F(z)}, \qquad [159$$

welcher z genügt (s. meine Abhandlung Bd. 66, p. 128[1]), geschehen, worin

$$F(z) = C.e^{-\int P dz}.$$

Die Grösse C hat einen constanten und bestimmten Werth, wenn $f(z)$, $\varphi(z)$ bestimmte Lösungen der Gleichung (A.) bedeuten.

Die Werthe von ζ, für welche z aufhören könnte holomorph zu sein, sind ausser $\zeta = \infty$ solche Werthe derselben Variabeln, für welche z gleich einem singulären Punkte der Gleichung (A.) oder $z = \infty$ wird.

Es sei zunächst für $\zeta = \zeta_1$, $z = a$ ein singulärer Punkt der Gleichung (A.), r_1, r_2 die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, welche den Gleichungen (G.) genüge leisten.

Nun ist (s. meine Abhandlung Bd. 66, p. 143[2]) in der Umgebung von a

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta(z),$$

wo $\eta(z)$ in der Umgebung von a holomorph und für $z = a$ von Null verschieden.

Ist nun erstlich

$$r_2 = r_1 + 1, \tag{2.}$$

so folgt unmittelbar aus Gleichung (J.), dass z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ holomorph ist. Findet dagegen die Gleichung (2.) nicht statt, so substituire man in Gleichung (J.)

$$z - a = t^n.$$

Man erhält alsdann

$$n\frac{dt}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi(t)}{\eta(t)}, \tag{3.}$$

worin $\psi(t)$ und $\eta(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorph und der Quotient derselben für $t = 0$ weder Null noch unendlich.

Es sei in diesem Falle

$$l = 2. \tag{4.}$$

Alsdann ergiebt die Gleichung (3.), dass t, folglich auch z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ holomorph ist.

---

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 166. Sch.

[2]) Ebenda S. 183. Sch.

Es sei ferner für $\zeta = \zeta_1$, $z = \infty$ und ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, welche der Gleichung (G'.) genüge leisten.

Es ist in der Umgebung von $z = \infty$

[160

$$(5.)\qquad \begin{cases} f(z) = \gamma_{11}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_1}\cdot h_1\left(\frac{1}{z}\right) + \gamma_{12}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_2}\cdot h_2\left(\frac{1}{z}\right), \\ \varphi(z) = \gamma_{21}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_1}\cdot h_1\left(\frac{1}{z}\right) + \gamma_{22}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_2}\cdot h_2\left(\frac{1}{z}\right), \\ F(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_1+\varrho_2+1}\cdot \eta_1\left(\frac{1}{z}\right), \end{cases}$$

wo $h_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $h_2\left(\frac{1}{z}\right)$, $\eta_1\left(\frac{1}{z}\right)$ in der Umgebung von $z = \infty$ holomorph und für $z = \infty$ von Null verschieden. Die Constanten $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{22}$ sind ebenfalls nicht Null, weil $f(z)$, $\varphi(z)$ willkürliche Lösungen der Gleichung (A.) sind.

Ist wiederum

$$(6.)\qquad \varrho_2 = \varrho_1 + 1,$$

so ergiebt die Gleichung (J.) unmittelbar, dass z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_2$ eindeutig ist. Wird dagegen die Gleichung (6.) nicht erfüllt, so substituire man in (J.)

$$z = t^{-n}$$

und erhält

$$(7.)\qquad -n\frac{df}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi_1(t)}{\eta_1(t)},$$

wo $\psi_1(t)$, $\eta_1(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorph und für $t = 0$ von Null verschieden.

In diesem Falle sei wieder

$$(8.)\qquad l = 2.$$

Alsdann ist t, folglich auch z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_2$ eindeutig.

Es sei endlich für $\zeta = \infty$, $z = b$, so ist nach der am Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung b weder einer der singulären Punkte der Gleichung (A.) noch unendlich. Für $z = b$ ist aber $\varphi(z) = 0$.

Es sei in der Umgebung von $z = b$

$$(9.)\qquad \begin{cases} f(z) = a_0 + a_1(z-b) + \cdots, \\ \varphi(z) = a_1'(z-b) + \cdots, \end{cases}$$

so erhält man

$$(10.) \qquad (z-b)\frac{a_1' + a_2'(z-b) + \cdots}{a_0 + a_1(z-b) + \cdots} = \frac{1}{\zeta}.$$

Da nun $f(z)$ und $\varphi(z)$ nicht gleichzeitig verschwinden, weil b nicht singulärer Punkt der Gleichung (A.) ist, so folgt, dass a_0 von Null verschieden ist. Es kann aber auch nicht a_1' verschwinden, weil sich sonst aus Gleichung (A.) ergeben würde, dass $\varphi(z)$ identisch Null ist. Demnach erhält Gleichung 161] (10.) die Form

$$(10a.) \qquad \alpha_1(z-b) + \alpha_2(z-b)^2 + \cdots = \frac{1}{\zeta},$$

wo $\alpha_1 = \frac{a_1'}{a_0}$ endlich und von Null verschieden. Es folgt nun aus dieser Gleichung auf bekannte Weise, dass z eine holomorphe Function von $\frac{1}{\zeta}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich also der Satz:

I. Genügen für jeden singulären Punkt die Grössen r_1, r_2 den Bedingungen

$$(K.) \quad \begin{cases} r_1 = -1 + \frac{1}{n} \text{ und entweder } r_2 = r_1 + 1 \text{ oder } r_2 = -1 + \frac{2}{n} \\ \text{und für den unendlich fernen Punkt} \\ \varrho_1 = 1 + \frac{1}{n} \text{ und entweder } \varrho_2 = \varrho_1 + 1 \text{ oder } \varrho_2 = 1 + \frac{2}{n}, \end{cases}$$

so ist die durch die Gleichung (H.) definirte Function z von ζ für alle Werthe von ζ meromorph.

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes ist das Corollar:

Die Function $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ erhält nicht ein und denselben Werth für verschiedene Werthe von z.

Wir setzen jetzt voraus, dass für den Fall, dass die Gleichung (2.) oder die Gleichung (6.) besteht, der Nenner von r_1, resp. der Nenner von ϱ_1 gleich 2 sei.

Alsdann ist auch die Function $F(z)$ eine eindeutige Function von ζ.

Es sei nämlich $\zeta = \zeta'$ ein Werth, für welchen z mit keinem der singulären Punkte der Gleichung (A.) coincidirt oder unendlich wird, so ist selbstverständlich $F(z)$ in der Umgebung von $\zeta = \zeta'$ eindeutig.

Es sei nunmehr $\zeta = \zeta_1$ ein Werth, für welchen z mit einem singulären Punkte a coincidirt, so ist nach dem Obigen

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta_1(z),$$

wo $\eta_1(z)$ in der Umgebung von $z = a$ holomorph und für $z = a$ von Null verschieden ist.

Findet nun Gleichung (2.) statt, so ist nach der eben gemachten Voraussetzung

$$r_1 + r_2 - 1 = 2r_1 = \text{einer ganzen Zahl},$$

es ist also $F(z)$ ebenso wie z in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ eindeutig.

Findet dagegen die Gleichung (4.) statt, so ist [162

$$r_2 + r_1 - 1 = -3 + \frac{3}{n}.$$

Es ist demnach

$$F(z) = t^{3-3n}\eta_1(a+t^n).$$

Nach dem Obigen ist t, folglich auch $F(z)$ in der Umgebung von $\zeta = \zeta_1$ eindeutig.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass $F(z)$ in der Umgebung eines solchen Werthes von ζ eindeutig ist, für welchen z unendlich wird.

Da oben nachgewiesen worden, dass z eine eindeutige Function von ζ ist, so folgt dasselbe für die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}$. Da also sowohl $\frac{dz}{d\zeta}$ als auch $F(z)$ eine eindeutige Function von ζ ist, so ergiebt die Gleichung (J.), dass auch $\varphi(z)^s$ und demgemäss auch $f(z)^s$ eindeutige Functionen von ζ sind.

Man erhält daher den folgenden Satz:

II. Wenn die Bedingungen (K) die Einschränkung erfahren, dass der Nenner von r_1 oder von ϱ_1 die Zahl Zwei sei für den Fall, dass $r_2 = r_1 + 1$ oder $\varrho_2 = \varrho_1 + 1$, so sind auch $\varphi(z)^s$ und $f(z)^s$ eindeutige Functionen von ζ.

6.

Aus der vorigen Nummer ergiebt sich, dass, wenn die unabhängigen Variabeln u_1, u_2 in den Gleichungen (B.) solche Werthe v_1, v_2 resp. erreichen, für welche z_1, z_2 die Gleichung (F.) befriedigen, nothwendigerweise $z_1 = z_2$ sein müsse, sobald die Gleichungen (K.) erfüllt sind.

Es sei demgemäss für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = z_2 = b$.

Wenn wir hier die Voraussetzung des Satzes II. voriger Nummer aufnehmen, so ergiebt sich nach diesem Satze, dass gleichzeitig die Gleichungen

$$f(z_2) = \pm f(z_1), \quad \varphi(z_2) = \pm \varphi(z_1) \tag{1.}$$

stattfinden, wo die Vorzeichen sich entsprechen.

Wir unterscheiden jetzt drei Fälle:

1. b sei ein nicht singulärer Punkt der Gleichung (A.), und es sei in der Umgebung von $z_1 = b$

$$\begin{cases} f(z_1) = a_0 + a_1(z_1-b) + a_2(z_1-b)^2 + \cdots, \\ \varphi(z_1) = c_0 + c_1(z_1-b) + c_2(z_1-b)^2 + \cdots, \end{cases} \tag{2.}$$

163] so ist nach den Gleichungen (1.)

$$\begin{cases} \pm f(z_2) = a_0 + a_1(z_2-b) + a_2(z_2-b)^2 + \cdots = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) = c_0 + c_1(z_2-b) + c_2(z_2-b)^2 + \cdots = \varphi'(z_2), \end{cases} \tag{2a.}$$

worin die Vorzeichen sich entsprechen.

Die Gleichungen (E.) werden daher

$$\begin{cases} \Delta' dz_1 = \quad \varphi'(z_2)\,du_1 - f'(z_2)\,du_2, \\ \pm \Delta' dz_2 = -\varphi(z_1)\,du_1 + f(z_1)\,du_2, \end{cases} \tag{Ea.}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix}.$$

Setzen wir

$$\begin{cases} (z_1-b) \pm (z_2-b) = w_1, \\ (z_1-b)^2 \pm (z_2-b)^2 = w_2, \end{cases} \tag{3.}$$

wo die Vorzeichen sich entsprechen, so folgt aus den Gleichungen (Ea.)

$$\begin{cases} \Delta' dw_1 = [\varphi'(z_2) - \varphi(z_1)]\,du_1 - [f'(z_2) - f(z_1)]\,du_2, \\ \Delta' dw_2 = 2[(z_1-b)\varphi'(z_2) - (z_2-b)\varphi(z_1)]\,du_1 - 2[(z_1-b)f'(z_2) - (z_2-b)f(z_1)]\,du_2. \end{cases} \tag{4.}$$

Setzt man die Werthe aus den Gleichungen (2.) und (2a.) in Δ' ein, so ergiebt sich, dass Δ' durch $(z_2-b)-(z_1-b)$ theilbar ist. Die Glieder des Quotienten sind ganze, homogene, symmetrische Functionen von z_1-b, z_2-b, und der Werth dieses Quotienten für $z_1 = b$, $z_2 = b$ ist $a_0c_1 - a_1c_0$, welcher nicht verschwindet, da $f(z)$, $\varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.) bilden.

Die Coefficienten von du_1, du_2 in den Gleichungen (4.) sind ebenfalls durch $(z_2-b)-(z_1-b)$ theilbar, und die Quotienten ganze, homogene, symmetrische Functionen von z_1-b, z_2-b.

Aus den Gleichungen (4.) ergeben sich demnach für $\frac{\partial w_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial w_2}{\partial u_2}$ Ausdrücke, welche rational von w_1, w_2 abhängen und für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nicht unendlich werden. Daher sind w_1, w_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2.

Gelten nunmehr in den Gleichungen (3.) die unteren Vorzeichen, so ergiebt sich, dass auch z_1-b und z_2-b, also z_1 und z_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 sind.

Gelten aber in den Gleichungen (3.) die oberen Vorzeichen, so folgt, dass z_1+z_2 und $z_1 z_2$ in derselben Umgebung eindeutige Functionen repräsentiren.

2. b sei ein singulärer Punkt der Gleichung (A.), r_1, r_2 die Wurzeln [164 der zu demselben gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, und zwar sei in Übereinstimmung mit den Sätzen I., II. voriger Nummer

$$(5.)\qquad \begin{cases} r_1 = -1+\frac{1}{n}, \quad r_2 = -1+\frac{2}{n} \text{ oder } r_2 = r_1+1 \\ \text{mit der Bedingung für den letzteren Fall, dass } n = 2. \end{cases}$$

Wir setzen in den Gleichungen (E.)

$$z_1-b = t_1^n, \quad z_2-b = t_2^n.$$

Alsdann ist

$$(6.)\qquad \begin{cases} f(z_1) = t_1^{1-n}[c_{11}g_1(t_1^n) + c_{12}t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)], \\ \varphi(z_1) = t_1^{1-n}[c_{21}g_1(t_1^n) + c_{22}t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)], \\ \pm f(z_2) = t_2^{1-n}[c_{11}g_1(t_2^n) + c_{12}t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_2^n)] = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) = t_2^{1-n}[c_{21}g_1(t_2^n) + c_{22}t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_2^n)] = \varphi'(z_2), \end{cases}$$

worin $c_{11}, \ldots, c_{22}$ willkürliche Constanten, $g_1(t^n)$, $g_2(t^n)$ in der Umgebung von $t = 0$ holomorphe Functionen von t^n und für $t = 0$ von Null verschieden und $\varepsilon = 0$ oder 1, je nachdem $r_2 = -1+\frac{2}{n}$ oder $r_2 = r_1+1$, d. h. $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = +\frac{1}{2}$. Setzen wir wieder

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix},$$

so folgt aus den Gleichungen (6.)

$$(6a.)\quad \Delta' = (c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})\,t_1^{1-n}t_2^{1-n}[t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_1(t_1^n)g_2(t_2^n)-t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)g_1(t_2^n)].$$

Der Ausdruck $\Delta t_1^{n-1}t_2^{n-1}$ ist durch $t_2^s-t_1^s$ oder durch t_2-t_1 theilbar, je nachdem $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = 0$. Der Werth des Quotienten für $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ ist

$$(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})\,g_1(0)\,g_2(0),$$

welcher von Null verschieden ist, weil $f(z)$, $\varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.), und weil $g_1(0)$, $g_2(0)$ nicht verschwinden.

Setzen wir

$$f(z_1)t_1^{n-1} = f_1(t_1),\quad \varphi(z_1)t_1^{n-1} = \varphi_1(t_1),$$
$$f'(z_2)t_2^{n-1} = f_1(t_2),\quad \varphi'(z_2)t_2^{n-1} = \varphi_1(t_2),$$

so werden die Gleichungen (E.)

$$(Eb.)\quad \begin{cases} n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dt_1 = \varphi_1(t_2)\,du_1 - f_1(t_2)\,du_2, \\ \pm n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dt_2 = -\varphi_1(t_1)\,du_1 + f_1(t_1)\,du_2. \end{cases}$$

165] Ist a) $\varepsilon = 0$, so ergiebt sich an der Hand der Gleichungen (Eb.) auf ähnliche Weise wie im Falle 1. für z_1-b, z_2-b an der Hand der Gleichungen (Ea.), dass t_1 und t_2 selber oder t_1+t_2, t_1t_2 und demnach auch z_1+z_2 und z_1z_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 sind.

Es sei b) $\varepsilon = 1$.

Setzen wir, je nachdem in den Gleichungen (Eb.) das obere oder untere Vorzeichen gilt,

$$t_1 \pm t_2 = w_1,\quad t_1^s \pm t_2^s = w_2,$$

so folgt aus den Gleichungen (Eb.)

$$(7.)\quad \begin{cases} n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dw_1 = [\varphi_1(t_2)-\varphi_1(t_1)]\,du_1 - [f_1(t_2)-f_1(t_1)]\,du_2, \\ n\Delta' t_1^{n-1}t_2^{n-1}dw_2 = 3[t_1^s\varphi_1(t_2)-t_2^s\varphi_1(t_1)]\,du_1 - 3[t_1^s f_1(t_2)-t_2^s f_1(t_1)]\,du_2. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind die Coefficienten von du_1, du_2 durch $t_2^s-t_1^s$ theilbar, die Quotienten sind in ihren einzelnen Gliedern rationale, homogene, symmetrische Functionen von t_1^s, t_2^s. Ausserdem ist

$$3t_1t_2 = \pm\left(w_1^2-\frac{w_2}{w_1}\right).$$

Daher sind $\frac{\partial w_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial w_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_2}{\partial u_2}$ rational aus w_1, w_2 gebildete Ausdrücke, welche

für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nicht unendlich werden, woraus sich ergiebt, dass w_1, w_2, folglich auch $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 sind.

3. $b = \infty$. Es seien ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung und in Übereinstimmung mit den Sätzen I., II. voriger Nummer

$$(5a.) \qquad \varrho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = \frac{3}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{5}{2}.$$

Setzen wir in der Gleichung (A.)

$$\frac{1}{z} = \xi, \quad y = \xi^3 \eta,$$

so sind

$$\frac{f(z)}{\xi^3} = f'(\xi),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\xi^3} = \varphi'(\xi)$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung zwischen η und ξ. Für diese Gleichung ist $\xi = 0$ ein singulärer Punkt, und es sind

$$(5b.) \qquad \sigma_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad \sigma_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{oder} \quad \sigma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = +\frac{1}{2} \qquad [166$$

die Wurzeln der zu $\xi = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung.

Aus den Gleichungen (B.) folgt aber, wenn man

$$\frac{1}{z_1} = \xi_1, \quad \frac{1}{z_2} = \xi_2$$

setzt,

$$(E'.) \qquad \begin{cases} f'(\xi_1) d\xi_1 + f'(\xi_2) d\xi_2 = du_1, \\ \varphi'(\xi_1) d\xi_1 + \varphi'(\xi_2) d\xi_2 = du_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich nun, wie im Falle 2), dass $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \xi_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ holomorphe Functionen von u_1, u_2 sind.

Demnach haben $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ dieselbe Eigenschaft.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich folgender Satz:

Sind die Wurzeln r_1, r_2 jeder determinirenden Fundamentalgleichung, welche zu den verschiedenen singulären Punkten der

Gleichung (A.) gehören, so beschaffen, dass entweder

$$r_1 = -1+\frac{1}{n}, \quad r_2 = -1+\frac{2}{n}$$

oder

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2}$$

und für die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der zu $z=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung entweder

$$\varrho_1 = 1+\frac{1}{n}, \quad \varrho_2 = 1+\frac{2}{n}$$

oder

$$\varrho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \varrho_2 = \tfrac{5}{2},$$

so sind die durch die Gleichungen (B.) definirten Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen von u_1, u_2.

7.

Nach meiner Abhandlung Bd. 66, p. 145[1]) dieses Journals ist

(1.) $$\sum(r_1+r_2)+\varrho_1+\varrho_2 = A-1,$$

wenn man mit A die Anzahl der singulären Punkte der Gleichung (A.) bezeichnet.

167] Ist A' die Anzahl der singulären Punkte, für welche die determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ haben, A'' die Anzahl der übrigen, so geht die Gleichung (1.) über in

(2.) $$3\sum\frac{1}{n_i}+\varrho_1+\varrho_2 = A'+3A''-1,$$

wo die Summe sich auf die Nenner der Wurzeln derjenigen Fundamentalgleichungen beziehen, welche zu den singulären Punkten der zweiten Art gehören. Da

$$\varrho_1+\varrho_2 \leqq 5,$$
$$3\sum\frac{1}{n_i} \leqq \frac{3A''}{2},$$

so folgt aus Gleichung (2.)

(3.) $$\tfrac{3}{2}A''+A' \leqq 6 \quad \text{oder} \quad A+\tfrac{1}{2}A' \leqq 6.$$

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 185, 186. Sch.

Hieraus folgt:

Die Anzahl der singulären Punkte der Gleichung (A.) ist nicht grösser als Sechs.

8.

Ein Beispiel für den Fall $A = 6$ ist das folgende.

Es sei für jeden der sechs singulären Punkte

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2},$$

so wird nach meiner Abhandlung Bd. 81 [1]) die Gleichung (A.) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt. Da überdies in den für die Umgebung je eines singulären Punktes oder des unendlich fernen Punktes geltenden Entwickelungen keine Logarithmen auftreten dürfen, so giebt es noch eine zweite Quadratwurzel einer rationalen Function, welche die Gleichung (A.) befriedigt und mit der ersten zusammen ein Fundamentalsystem bildet.

Bezeichnet man die singulären Punkte mit $a_1, a_2, \ldots, a_6$ und setzt

$$(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_6) = \varphi(z),$$

so hat das Fundamentalsystem die Form

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{\varphi(z)}}, \qquad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

wo $g(z), h(z)$ ganze rationale Functionen bedeuten.

Da im gegenwärtigen Falle

$$\varrho_1 = 2, \quad \varrho_2 = 3,$$

so folgt, dass $g(z), h(z)$ den ersten Grad nicht übersteigen. Im gegen- [168 wärtigen Beispiele liefern also die Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

9.

Dass aber im Allgemeinen die hier charakterisirten Differentialgleichungen (A.) nicht algebraische Integrale besitzen, und demzufolge die Functionen $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ von den ABELschen Functionen verschieden sind, ergiebt sich an dem folgenden Beispiel.

[1]) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.

Es sei $A = 2$, a_1, a_2 die beiden singulären Punkte der Gleichung (A.); die Wurzeln der zu a_1 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r_{11} = -\tfrac{3}{8}, \quad r_{12} = -\tfrac{1}{8},$$

die Wurzeln der zu a_2 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r_{21} = -\tfrac{5}{6}, \quad r_{22} = -\tfrac{4}{6},$$

die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$\varrho_1 = \tfrac{5}{2}, \quad \varrho_2 = 2.$$

Substituirt man in der Gleichung (A.) für diesen Fall

$$y = (z-a_1)^{-1}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}} w,$$

so sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung für w resp. gehörig

$$\text{zu } a_1 : \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}; \quad \text{zu } a_2 : \tfrac{5}{12}, \tfrac{7}{12}; \quad \text{zu } \infty : -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4},$$

also hat die Gleichung für w die Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} = Pw, \tag{1.}$$

wo P eine rationale Function von z.

Nach meiner Abhandlung Bd. 81 dieses Journals p. 135[1]) ist diese Differentialgleichung, da die Nenner der Wurzeln der zu a_2 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung grösser als zehn, nicht algebraisch integrirbar, wenn nicht ihre Integrale selber oder eine homogene Function zweiten Grades ihrer Integrale gleich der Wurzel einer rationalen Function.

Da die Nenner der Wurzeln der zu den singulären Punkten a_1, a_2 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden sind, so bliebe nach derselben Abhandlung p. 136[2]) nur die Möglichkeit, dass die Gleichung (1.) vollständig durch Wurzeln rationaler Function integrirbar wäre.

Dieses findet jedoch nicht statt.

169] Denn jede Wurzel w einer rationalen Function von z, welche der Gleichung (1.) genügen soll, müsste die Form

$$w = \psi(z)(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}$$

[1]) Abh. XX, S. 58 dieses Bandes. Sch.

[2]) Ebenda S. 51. Sch.

haben, wo $\psi(z)$ eine ganze rationale Function von z, welche für $z = a_1$ und für $z = a_2$ von Null verschieden ist, wo ferner α_1 einen der Werthe $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; α_2 einen der Werthe $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ hätte. Der Grad μ von $\psi(z)$ müsste der Bedingung

$$\mu + \alpha_1 + \alpha_2 = \tfrac{3}{4} \text{ oder } \tfrac{1}{4}$$

genügen.

Diesen Anforderungen entspricht aber nur die Function

$$w = (z-a_1)^{\frac{1}{2}}(z-a_2)^{\frac{5}{12}}$$

und keine andere Wurzel einer rationalen Function.

Die Gleichung (1.) ist demnach nicht vollständig durch algebraische Functionen integrirbar, daher auch nicht die Gleichung (A.).

Wir fügen zum Beschluss noch folgende Bemerkung hinzu:

Setzt man, wie in Gleichung (H.)

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = v, \tag{1.}$$

so ist nach No. 5 Satz I. z eine eindeutige Function von v. Nach Satz II. derselben Nummer sind aber auch $f(z)^2$ und $\varphi(z)^2$ eindeutige Functionen von v.

Es sei daher

$$z = \chi(v), \tag{2.}$$

so ergiebt sich folgender Satz:

Die Gleichungen (B.) lassen sich durch die eindeutigen im allgemeinen nicht rationalen Substitionen

$$z_1 = \chi(v_1), \quad z_2 = \chi(v_2)$$

in die Form

$$\text{(L.)} \qquad \begin{cases} \int_{\eta_1}^{v_1} \sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} \sqrt{g(v)}\,dv = u_1 \\ \int_{\eta_1}^{v_1} v\sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} v\sqrt{g(v)}\,dv = u_2, \end{cases}$$

bringen, wo

$$\zeta_1 = \chi(\eta_1), \quad \zeta_2 = \chi(\eta_2)$$

und $g(v)$ eine eindeutige im allgemeinen nicht rationale Function von v ist.

Heidelberg, 14. Februar 1880.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 200, Zeile 8 $\zeta = \zeta_1$ statt $z = \zeta_1$,

„ 210, „ 13 v. u. die Nenner der Wurzeln statt die Wurzeln.

2) Der Ausdruck analytische Function (S. 191, Zeile 2, 1 v. u. und S. 193, Zeile 15) ist hier und ebenso an den entsprechenden Stellen der Abhandlungen XXX, XXXII[1]) in dem Sinne zu verstehen, wie JACOBI in der Abhandlung (Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 13, 1834, Werke, Bd. 2, 1882, S. 45 ff.), an welche die Untersuchungen von FUCHS sich anschliessen, diesen Ausdruck gebraucht. Eine Function einer Variabeln wird[2]) nach JACOBI als eine analytische zu bezeichnen sein, wenn die Werthe der unabhängigen Variabeln, für welche die Function denselben Werth annehmen kann — nach der von Herrn G. CANTOR (Mathematische Annalen, Bd. 15, 1879, S. 2) eingeführten Terminologie — nicht in der ganzen Ebene überall dicht sind. Den analogen Begriff hatte JACOBI auch für Functionen von mehreren Variabeln gebildet[3]). Das von FUCHS in der No. 1 (S. 193, Z. 8—16) formulirte Problem stimmt demnach mit der Frage überein, unter welchen Bedingungen die durch die Transformationen (ebenda)

$$\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \beta_1 c,$$
$$\alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \beta_2 c$$

dargestellte Gruppe — im Sinne der von Herrn POINCARÉ, in seinen an eben diese Arbeit von FUCHS anknüpfenden Untersuchungen (1882), eingeführten Terminologie — eine eigentlich discontinuirliche ist.

Zu dem Satze I., S. 202 vergl. die Abhandlung XXXIV und die zu ihr gehörige Anmerkung.

Eine französische Übersetzung der vorstehenden Abhandlung (von Herrn STÉPHANOS) ist im Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. IV, 1880, S. 278—300, erschienen. SCH.

---

[1]) Vergl. auch die Abhandlung XLVI (1885) dieses Bandes.

[2]) Vergl. Schlesinger, Über den Begriff der analytischen Function bei Jacobi etc., Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. VI, 1905, S. 88 ff.

[3]) Vergl. Schlesinger, a. a. O. S. 94.

XXXII.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES TIRÉES DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DE SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES LINÉAIRES DONT LES COEFFICIENTS SONT DES FONCTIONS RATIONNELLES.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE.)

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 90, Paris 1880.)

---

a.

(Séance du Lundi 22 Mars 1880, p. 678—680.)

De même que ces fonctions de plusieurs variables que l'on appelle [678 fonctions ABÉLiennes doivent leur naissance aux intégrales des fonctions algébriques, en concevant, d'après JACOBI, les limites supérieures de p intégrales d'une fonction algébrique convenablement choisie comme fonctions de la somme de ces intégrales et de $p-1$ autres sommes composées d'une manière semblable, de même on fait naître une nouvelle classe de fonctions de plusieurs variables, comme je le démontre dans mon Mémoire, si l'on part des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels comme fondement.

Je me suis proposé d'abord le problème de rechercher la nature des intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène de l'ordre m, en supposant possible de définir $z_1, z_2, \ldots, z_m$ comme fonctions analytiques des variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ par les équations

$$\sum_1^m{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ sont des constantes,

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_m(z)$$

un système fondamental de solutions de l'équation différentielle.

J'ai complètement résolu ce problème pour les équations différentielles du second ordre, et je suis parvenu aux résultats suivants.

1. Étant donnée l'équation différentielle

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

où P, Q signifient des fonctions rationnelles de z, soit $f(z), \varphi(z)$ un système fondamental arbitraire de solutions de cette équation; que l'on définisse z_1, z_2 comme des fonctions des variables u_1, u_2 par les équations

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2. \end{cases}$$

En supposant z_1, z_2 fonctions analytiques de u_1, u_2 et en posant

$$z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2),$$

679] on obtient tout d'abord la propriété suivante de ces fonctions,

$$\text{(C.)} \qquad \begin{cases} F_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c) = F_1(u_1, u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \gamma_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \gamma_2 c) = F_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

où l'on désigne par c une constante, par $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ les éléments d'une substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

à laquelle on doit assujettir $f(z), \varphi(z)$ lorsque la variable part d'une valeur et y revient en décrivant un contour fermé, et γ_1, γ_2 étant des quantités déterminées relatives à ce contour.

Les fonctions F_1, F_2 reprennent d'ailleurs en général les mêmes valeurs pour d'autres systèmes de valeurs de u_1, u_2 en nombre infini.

2. Soit a_i un point singulier de l'équation (A.); soient $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ les racines de l'équation fondamentale déterminante pour le point a_i, soient, en outre,

s_1, s_2 les racines de l'équation fondamentale déterminante pour $z = \infty$. Je détermine d'abord ces racines de manière que, lorsque u_1, u_2 acquièrent des valeurs pour lesquelles des deux valeurs a, b que reçoivent respectivement les quantités z_1, z_2, l'une coïncide avec un point singulier ou l'une et l'autre avec deux points singuliers différents entre eux, sans que l'équation

$$\text{(D.)} \qquad \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)} - \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = 0$$

soit satisfaite par $z_1 = a$, $z_2 = b$, les dérivées partielles de z_1 et z_2 deviennent fonctions holomorphes de z_1, z_2 dans le voisinage de $z_1 = a$, $z_2 = b$.

Il est à remarquer que l'on comprend ici le point $z = \infty$ parmi les points singuliers.

D'ailleurs, je fais la détermination de manière que, pour des systèmes de valeurs finies de u_1, u_2, z_1, z_2 peuvent acquérir les valeurs indiquées.

Voici, à cette effet, les conditions nécessaires et suffisantes:

$$\text{(E.)} \begin{cases} r_1^{(i)} = -1 + \dfrac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1 + \dfrac{k_i}{n_i}, \quad k_i > 1, \quad k_i, n_i \text{ des nombres entiers et positifs;} \\ s_1 = 1 + \dfrac{1}{n}, \quad s_2 = 1 + \dfrac{k}{n}, \quad k > 1, \quad k, n \text{ des nombres entiers et positifs.} \end{cases}$$

Je fais voir alors que les quantités $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$, s_1, s_2 peuvent être déter- [680
minées, en outre, de manière que, par l'équation

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta,$$

z se définisse comme fonction monodrome de ζ, et que, partant, l'équation (D.) ne puisse être satisfaite que pour $z_1 = z_2$. Les conditions qui sont alors nécessaires et suffisantes sont les suivantes:

$$r_2^{(i)} = r_1^{(i)} + 1 \quad \text{ou} \quad k_i = 2,$$

et

$$s_2 = s_1 + 1 \quad \text{ou} \quad s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad s_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

en ajoutant la condition que le développement d'une intégrale de l'équation (A.) dans le voisinage d'un point singulier ne contienne pas de logarithmes.

Je démontre ensuite que, si

$$(G.)\quad \begin{cases} r_1^{(i)} = -1+\frac{1}{n_i}, \quad r_2^{(i)} = -1+\frac{2}{n_i} \quad \text{ou} \quad r_1^{(i)} = -\frac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = \frac{1}{2}, \\ s_1 = \frac{3}{2}, \quad s_2 = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad s_1 = 1+\frac{1}{n}, \quad s_2 = 1+\frac{2}{n}, \end{cases}$$

la condition étant en outre remplie que le développement d'une intégrale de l'équation (A.) dans le voisinage d'un point singulier ne contienne pas de logarithmes, z_1, z_2 sont des racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions analytiques et monodromes de u_1, u_2.

---

b.

(Séance du Lundi 29 Mars 1880, p. 735—736.)

735] 3. Aux résultats que j'ai précédemment exposés*), j'ajoute les suivants. Je fais voir que le nombre ϱ des points singuliers finis de l'équation (A.) ne surpasse pas le nombre 6, en supposant remplies les conditions (G.).

Je marque ensuite l'exemple

$$\varrho = 6, \quad r_1^{(i)} = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2^{(i)} = \tfrac{1}{2},$$

et je fais voir que, dans ce cas, l'équation (A.) est satisfaite par le système fondamental

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{R(z)}}, \qquad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

où

$$R(z) = (z-a_1)\dots(z-a_6),$$

$g(z)$, $h(z)$ sont des fonctions rationnelles et entières dont le degré ne surpasse par l'unité. Dans ce cas, les fonctions $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ coïncident avec les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Puis je démontre qu'en général l'équation (A.), sous les conditions (G.), n'est pas intégrable complètement par des fonctions algébriques, et que, par

*) Comptes rendus, même tome, p. 678 [1]).

[1]) Note précédente. Sch.

conséquent, nos fonctions $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ sont différentes des fonctions ABÉLiennes.

J'y applique l'exemple suivant, compatible avec les conditions (G.), savoir: nombre des points singuliers finis $\rho = 2$,

$$r_1^{(1)} = -\tfrac{2}{3}, \quad r_2^{(1)} = -\tfrac{1}{3},$$
$$r_1^{(2)} = -\tfrac{5}{6}, \quad r_2^{(2)} = -\tfrac{4}{6},$$
$$s_1 = \tfrac{3}{2}, \quad s_2 = 2,$$

et je démontre que l'intégrale générale de l'équation (A.) n'est pas algébrique dans ce cas.

A la fin je remarque que, les conditions (G.) étant remplies, les équations (B.) sont transformées par la substitution monodrome, mais généralement non rationnelle, (F.) en des équations semblables, dans lesquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont remplacées par les racines carrées de fonctions monodromes, mais généralement non rationnelles de ζ, et ζ prend la place de z comme variable d'intégration.

J'ajoute le théorème suivant, qui est semblable aux théorèmes d'ABEL pour les intégrales des fonctions algébriques:

Etant données deux séries de valeurs de z arbitrairement choisies, l'une en contenant un nombre quelconque n, savoir [736

$$z_3, z_4, \ldots, z_{n+2},$$

l'autre les valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+2}$; étant d'ailleurs données les valeurs qu'acquièrent les fonctions $f(z), \varphi(z)$ qui font ensemble un système fondamental d'intégrales de l'équation (A.), savoir

$$f(z_i) = a_i, \quad f(\zeta_i) = \alpha_i,$$
$$\varphi(z_i) = b_i, \quad \varphi(\zeta_i) = \beta_i,$$

on peut toujours trouver deux quantités z_1, z_2, et d'une seule manière, satisfaisant à la fois aux équations

$$\sum_1^{n+2} i \int_{\zeta_i}^{z_i} f(z_i)\, dz_i = 0, \qquad \sum_1^{n+2} i \int_{\zeta_i}^{z_i} \varphi(z_i)\, dz_i = 0$$

et à une équation du second degré dont les coefficients sont des

fonctions monodromes des quantités

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}, \quad \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+2}, \quad a_i, b_i. \quad \alpha_i, \beta_i.$$

Ce théorème découle immédiatement du théorème énoncé à la fin du no. 2. Enfin je remarque que, pour la discussion ultérieure des fonctions F_1, F_2, il faut avoir recours aux résultats de mon Mémoire contenu dans le Journal de M. BORCHARDT, t. 76, p. 177[1]).

1) Mém. XVI, t. I de cette édition, p. 415 et suiv. Sch.

XXXIII.

ÜBER DIE FUNCTIONEN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE VON LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ENTSTEHEN.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A. Universität, Göttingen 1880, No. 13, 14. Juli 1880, Sitzung am 3. Juli; S. 445—453.)

In einer Mittheilung, enthalten in den »Nachrichten der Königl. Ge- [445
sellschaft der Wissenschaften« Februar d. J. p. 170 sqq.[1]) habe ich Functionen mehrerer Variabeln definirt, welche der Umkehrung von Integralen der Lösungen linearer Differentialgleichungen ihre Entstehung verdanken.

Ich habe daselbst, und ausführlicher in BORCHARDTS Journal Bd. 89, p. 151 sqq.[2]), ein Beispiel derartiger Functionen geliefert, indem ich für den Fall von Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgende Einschränkungen einführte:

Die Functionen z_1, z_2 von u_1, u_2 sollen die singulären Stellen der Differentialgleichung für endliche Werthe von u_1, u_2 erreichen, und die Darstellung der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte keine Logarithmen enthalten. Ausserdem sollen diese singulären Stellen sämmtlich so beschaffen sein, dass die Lösungen in ihnen unendlich werden [446
oder sich verzweigen.

Es ist selbstverständlich, dass diese Einschränkungen nicht sämmtlich nothwendig sind. Die nothwendigen Einschränkungen habe ich vielmehr in

1) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.

einer Arbeit, welche nächstens erscheinen wird, für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung entwickelt.

Die gegenwärtige Notiz bezweckt nur die Tabelle derjenigen Differentialgleichungen aufzustellen, welche den im obengenannten Beispiele gemachten Einschränkungen entsprechen, indem ich in den Bezeichnungen auf die oben erwähnte in den Nachrichten der Königl. Societät enthaltene Notiz unter dem Zeichen N. Bezug nehme.

In dieser Tabelle, welche ich hier folgen lasse, bezeichnen p, q die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0,$$

und A die Anzahl der singulären Punkte der Differentialgleichung (A.) in N.

Bei jeder Differentialgleichung, welche algebraische Integrale besitzt, ist der Kürze halber nur die Bemerkung »algebraische Integrale« angeführt, während für die übrigen ein Fundamentalsystem von Integralen ω_1, ω_2 der Differentialgleichung für ω angegeben ist.

I. $A = 6$.

$$R = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_6), \quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

447] II. $A = 5$.

1) $$R = (z-a_1)\dots(z-a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_4} + \frac{1}{z-a_5}\right), \quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-a_4)(z-a_5)},$$

algebraische Integrale.

2) $$R = (z-a_1)\dots(z-a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

III. $A = 4$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4), \quad y = R^{-\frac{1}{4}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

wo Ω einen Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$ bezeichnet,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}.$$

2) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_4)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_3} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_4},$$
$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_2+2a_3+a_4) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)},$$

algebraische Integrale.

3) $$y = [(z-a_1)\ldots(z-a_4)]^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{R}, \quad R = (z-a_2)(z-a_4), \qquad [448$$

algebraische Integrale.

4) $$y = [(z-a_1)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_4);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

5) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \tfrac{3}{2}(z-a_4)^{-1}, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

IV. $A = 3$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

wo Ω ein Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}.$$

2) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3}, \qquad [449$$

$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_1+2a_2+a_3) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

algebraische Integrale.

3) $$y = R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{1}{2}}dz.$$

4) $$(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}(z-a_3)^{-\frac{5}{6}} = R, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_3},$$
$$q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R dz.$$

5) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

6) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

7) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{36}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3}, \quad q = -\frac{1}{18}\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)},$$

algebraische Integrale.

9) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega;$$
$$p = \tfrac{2}{3}(z-a_3)^{-1}, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

V. $A = 2$.

1) $$(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}} = R, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

2) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{3}{4}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{1}{2}}dz.$$

3) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0, \qquad [451$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

4) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{1}{2}}dz.$$

5) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

6) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

7) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

algebraische Integrale.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

algebraische Integrale.

452] Für diejenigen Differentialgleichungen, denen algebraische Integrale zugehören, ist z eine rationale Function $\chi(\zeta)$ von ζ. Substituirt man in Gleichung (B.) in N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

so erhält man zur Bestimmung von ζ_1, ζ_2 als Functionen von u_1, u_2 die Gleichungen, welche für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung bestehen.

Für die Fälle IV. 3), 4), V. 1), 2), 3), 4), 5), 6) ergiebt sich aus der Abhandlung der Herren Briot et Bouquet, im Journal de l'École Polytechnique, t. XXI, p. 222, dass z eine eindeutige doppeltperiodische Function $\chi(\zeta)$ von ζ ist.

Ebenso stellt für die Fälle III. 1), IV. 1), z eine eindeutige Function $\chi(\zeta)$ von ζ dar, von der Beschaffenheit

$$\chi(2\pi i\zeta) = \chi(\zeta),$$
$$\chi\left(\frac{\Omega'}{\Omega}2\pi i\zeta\right) = \chi(\zeta),$$

wo Ω' einen zweiten von Ω verschiedenen Periodicitätsmodul des Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$ bedeutet. Substituirt man in die Gleichungen (B.) in N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

so gehen diese Gleichungen für III. 1), IV. 1), über in

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{\Omega}u_1,$$

453]
$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\pi i}{\Omega}u_2,$$

dagegen für IV. 3), 4) und V. 1) bis 6) in

$$\zeta_1 + \zeta_2 = u_1,$$
$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

so dass in allen diesen Fällen die Coefficienten der quadratischen Gleichung für z_1, z_2 (N. p. 174[1])) sich mit Hülfe der elliptischen Functionen darstellen lassen.

Heidelberg, Juni 1880.

[1]) S. 188 dieses Bandes. Sch.

XXXIV.

AUSZUG AUS EINEM SCHREIBEN DES HERRN L. FUCHS AN C. W. BORCHARDT.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 90, 1881, S. 71—73.)

In einem Résumé der Resultate meiner Arbeit »über eine Klasse von [7] Functionen etc.«, welche ich in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Februar 1880 p. 170—176[1]) veröffentlicht habe, befindet sich p. 173[2]) daselbst folgender Satz:

I. Sind $f(z)$ und $\varphi(z)$ ein willkürliches Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, und genügen für jeden singulären Punkt die Wurzeln r_1, r_2 der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Bedingungen

$$r_2 = r_1 + 1 \quad \text{oder} \quad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad (n \text{ ganze positive Zahl}),$$

sowie die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Bedingungen

$$\varrho_2 = \varrho_1 + 1 \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{2}{\nu} \quad (\nu \text{ ganze positive Zahl}),$$

und enthalten die Entwickelungen der Lösungen der Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen, so wird durch

1) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Ebenda, S. 187. Sch.

die Gleichung

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

z als eindeutige Function von ζ definirt.

In meiner in Ihrem Journal Bd. 89, p. 151 sqq.[1]) enthaltenen Arbeit, in welcher die oben genannten Resultate entwickelt wurden, ist der obige Satz als Satz I. p. 161[2]) aufgenommen worden, in einer etwas veränderten Form, welche weniger deutlich ist und die Möglichkeit eines Missverständnisses nicht 72] ausschliesst. Auf diesen Umstand wurde ich aufmerksam gemacht durch eine gütige Mittheilung des Herrn Henri Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Ich erlaube mir daher hier einige Erläuterungen zu diesem Satze hinzuzufügen.

Man ziehe in der z-Ebene von jedem der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ der Differentialgleichung einen beliebigen Schnitt, von a_i den Schnitt q_i. Diese Schnitte erstrecken sich sämmtlich bis zum Punkte $z = \infty$, und sind nur der Beschränkung unterworfen, weder sich selbst noch einer den anderen zu schneiden. Bezeichnen wir die so zerschnittene z-Ebene mit T. Werden für einen willkürlichen Werth $z = z_0$, $f(z)$ und $\varphi(z)$, sowie ihre ersten Ableitungen willkürlich gewählt, so sind diese Functionen, folglich auch ζ in T überall eindeutig bestimmt. Überschreitet man nach und nach die einzelnen Schnitte $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ in beliebiger Reihenfolge und jeden beliebig oft, so mögen die so entstehenden Flächen mit T_1, T_2, T_3 etc. bezeichnet werden. Ihre Anzahl ist unendlich gross, wenn nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ algebraische Functionen sind. In jeder dieser Flächen T_i ist ζ eine eindeutige Function von z. — Wir stellen nunmehr in der ζ-Ebene durch die Gleichung (F.) die Abbildungen der einzelnen Blätter T, T_1, T_2, T_3 etc. her. Die der Fläche T_i entsprechende Abbildungsfläche in der ζ-Ebene möge mit S_i bezeichnet werden. So lange nicht in einem Blatte T_i, $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch, d. h. für jeden Werth von z, unendlich werden, erfüllt die zugehörige Abbildung S_i ebenfalls eine Fläche, mag T_i durch eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Überschreitungen der Schnitte $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ erhalten worden sein. Sind da-

[1]) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Ebenda, S. 202. Sch.

gegen in einem Blatte T_i, welches durch unendlich oft wiederholtes Überschreiten der Schnitte q erhalten worden, $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich, so ist die Abbildung S_i von T_i ein Punkt.

Die Gesammtheit der Abbildungen $S, S_1, S_2, \ldots$ bildet eine zusammenhängende Fläche in der ζ-Ebene. Diejenigen dieser Abbildungen, welche nicht solchen Flächen T_i zugehören, in denen $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, enthalten nach den Entwickelungen meiner Arbeit in Ihrem Journal p. 158—160[1]) keinen Verzweigungspunkt; die Gesammtheit solcher Abbildungen constituirt daher eine Fläche σ in der ζ-Ebene, welche diese Ebene überall nur einfach bedeckt. An der Begrenzung dieser Fläche σ befinden sich die Punkte, welche als Abbildungen solcher Flächen T_i auftreten, innerhalb deren $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, da diese durch Grenzübergang aus den die Fläche σ [73 constituirenden Flächen erhalten werden.

Der Sinn des Satzes I. p. 161[2]) meiner Arbeit in Ihrem Journal geht nun dahin, dass z innerhalb der Fläche σ eine überall meromorphe Function von ζ sei. Aus ihm geht alsdann das gleich nachfolgende Corollar hervor, wovon in den späteren Theilen der Arbeit Gebrauch gemacht wird, dass nämlich $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ nicht für zwei verschiedene Werthe von z einen und denselben Werth annimmt, vorausgesetzt natürlich, dass dieser Quotient nicht von z unabhängig wird, oder was dasselbe besagt, dass nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden.

Wird einer der Grenzpunkte nach jeder Richtung von Flächen S umgeben, so ist zu den obengenannten Bedingungen noch eine auf die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten bezügliche hinzuzufügen.

Heidelberg, den 7. Juni 1880.

---

[1]) Abh. XXXI, S. 198—202 dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 202 dieses Bandes. Sch.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 226, Zeile 6 p. 161 statt p. 159,

„ „ , „ 13 Man ziehe statt Zieht man.

2) Die in dem Schlussabsatze der vorstehenden Abhandlung erwähnte Bedingung für die Coefficienten der Differentialgleichung, die in gewissen Fällen den in dem Satze I. (S. 225) enthaltenen Bedingungen hinzugefügt werden muss, tritt bei den Fällen III. 1) und IV. 1) der in der Abhandlung XXXIII (S. 220 ff.) aufgestellten Tabelle auf; sie ist transcendenter Natur und besteht darin, dass beidemal die in dem Coefficienten q vorkommende Constante Ω gleich einem Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$ zu wählen ist (a. a. O. S. 221). SCH.

XXXIVa.

SUR LES FONCTIONS PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES [1]).

(Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2e série, t. 4, 1880, p. 328—336.)

Dans une Communication, insérée dans les Nachrichten von der [328
K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, numéro de février 1880, p. 170 et suiv. [2]), j'ai défini des fonctions de plusieurs variables qui doivent leur naissance à l'inversion des intégrales des équations diffé- [329
rentielles linéaires.

J'ai donné en ce lieu, et avec plus de détails dans le Journal de Borchardt, t. 89, p. 151, etc. [3]), un exemple des fonctions de cette sorte, en introduisant, pour le cas des équations différentielles du second ordre, les restrictions suivantes:

Les fonctions z_1, z_2 de u_1, u_2 doivent atteindre les points singuliers de l'équation différentielle pour des valeurs finies de u_1, u_2, tandis que dans la représentation des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne doivent pas entrer de logarithmes. De plus, tous ces points singuliers doivent avoir la propriété que les solutions y deviennent infinies ou bien y subissent des ramifications.

Il est manifeste que ces restrictions ne sont pas nécessaires toutes à la fois. Quant aux restrictions nécessaires, je les ai développées, pour des

1) Traduction des Mémoires XXXIII et XXXIV. Sch.

2) Mém. XXX, p. 185 et suiv. de ce volume. Sch.

3) Mém. XXXI, p. 191 et suiv. de ce volume. Sch.

équations différentielles d'ordre quelconque, dans un travail qui doit paraître bientôt.

Le but de la Note actuelle est de présenter le Tableau des équations différentielles qui répondent aux restrictions faites pour les exemples dont je viens de parler. La Note déjà mentionnée, insérée dans les Nachrichten de Goettingue, à laquelle nous aurons à nous reporter, sera désignée par la lettre N.

Dans ce Tableau, que nous dressons ci-après, p et q désignent les coefficients de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0,$$

et A le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (A.) de N.

Pour toute équation différentielle admettant des intégrales algébriques, nous nous bornerons, pour abréger, à la remarque »intégrales algébriques«, tandis que pour les autres nous donnons un système fondamental d'intégrales ω_1, ω_2 de l'équation différentielle en ω.

I. $A = 6$.

$$R = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_6), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

330] II. $A = 5$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_4} + \frac{1}{z-a_5}\right), \quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-a_4)(z-a_5)},$$

intégrales algébriques.

2) $$R = (z-a_1)\dots(z-a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

III. $A = 4$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{1}{R},$$

Ω désignant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}.$$

2) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_4)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_3} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_4},$$
$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_2+2a_3+a_4) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)},$$

intégrales algébriques.

3) $$y = [(z-a_1)\dots(z-a_4)]^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{4}\frac{1}{R}, \quad R = (z-a_3)(z-a_4),$$

intégrales algébriques.

4) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_3)(z-a_4);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques. [331

5) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)]^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \tfrac{3}{2}(z-a_4)^{-1}, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

IV. $A = 3$.

1) $$R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

Ω étant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}} dz}.$$

2) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3},$$

$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_1+2a_2+a_3) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques.

3) $$y = R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{1}{2}}dz.$$

4) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{2}{3}}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_3}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

5) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

332] intégrales algébriques.

6) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques.

7) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega, \quad R = (z-a_2)(z-a_3);$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3}, \quad q = -\frac{1}{18}\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques.

9) $$y = [(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \tfrac{1}{2}(z-a_3)^{-1}, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

V. $A = 2$.

1) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}; \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

2) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{3}{4}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{1}{2}}dz.$$

3) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

4) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$ [333
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{1}{2}}dz.$$

5) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

6) $$R = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y = R\omega;$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz.$$

7) $$R = (z-a_1)(z-a_2), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques.

8) $$y = (z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}\omega;$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

Pour les équations différentielles qui admettent des intégrales algébriques, z est une fonction rationnelle $\chi(\zeta)$ de ζ. En substituant dans l'équation (B.) de N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

on obtient, pour la détermination des ζ_1, ζ_2 comme fonctions de u_1, u_2 les équations qui ont lieu pour les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Pour les cas IV. 3), 4), V. 1), 2), 3), 4), 5), 6), il résulte du Mémoire de MM. Briot et Bouquet (Journal de l'École Polytechnique, t. XXI, p. 222) que z est une fonction uniforme et doublement périodique $\chi(\zeta)$ de ζ.

De même, pour les cas III. 1), IV. 1), z représente une fonction uni-
334] forme $\chi(\zeta)$ de ζ, telle que

$$\chi(2\pi i\zeta) = \chi(\zeta), \quad \chi\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} 2\pi i\zeta\right) = \chi(\zeta),$$

où Ω_1 désigne un second module de périodicité de l'intégrale $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$, différent de Ω. En substituant dans les équations (B.) de N.

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

ces équations deviennent, pour les cas III. 1), IV. 1),

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{\Omega} u_1,$$

$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi i}{\Omega} u_2,$$

tandis que, pour les cas IV. 3), 4) et V. 1), 2), ..., 6), elles deviennent

$$\zeta_1 + \zeta_2 = u_1, \quad \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

de sorte que pour tous ces cas les coefficients de l'équation quadratique pour z_1, z_2 (N., p. 174[1]) sont représentables au moyen des fonctions elliptiques.

Heidelberg, juin 1880.

---

[1]) P. 188 de ce volume. Sch.

Extrait d'une Lettre adressée par M. FUCHS à M. BORCHARDT.

Dans un résumé des résultats de mon travail Sur une classe de fonctions, etc., que j'ai publié dans les Nachrichten de Goettingue (février 1880, p. 170—176[1]), se trouve (p. 173[2]) la proposition suivante:

I. Si $f(z)$ et $\varphi(z)$ forment un système fondamental arbitraire de solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients rationnels, et que pour tout point singulier les racines r_1, r_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante satisfassent aux conditions

$$r_2 = r_1 + 1 \quad \text{ou} \quad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n}$$

(n étant un nombre entier positif), tandis que les racines ϱ_1, ϱ_2 [335 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante à $z = \infty$ satisfont aux conditions

$$\varrho_2 = \varrho_1 + 1 \quad \text{ou} \quad \varrho_1 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{2}{\nu}$$

(ν étant un nombre entier positif), et que de plus les développements des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne contiennent pas de logarithmes, l'équation

$$\text{(F.)} \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

détermine z comme fonction uniforme de ζ.

Dans mon travail inséré dans votre Journal (t. 89, p. 151, et suiv.[3]), dans lequel j'ai développé les résultats mentionnés, la proposition précédente a été présentée (p. 161[4]) comme proposition I., sous une forme un peu modifiée, laquelle, étant d'une moindre clarté, n'éloigne pas la possibilité d'une mésintelligence. C'est M. H. POINCARÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, qui par une aimable Communication a attiré mon attention sur cette circonstance.

---

1) Mém. XXX, p. 185 et suiv. de ce volume. Sch.
2) Ibid. p. 187. Sch.
3) Mém. XXXI, p. 191 et suiv. de ce volume. Sch.
4) Ibid. p. 202. Sch.

Je prends maintenant la liberté de joindre ici quelques éclaircissements sur cette proposition.

Soit menée dans le plan des z, par chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ de l'équation différentielle, une coupure quelconque, la coupure q_i par le point a_i. Que toutes ces coupures soient supposées continuées jusqu'au point $z = \infty$ et soumises seulement à la restriction de ne pas se croiser ni avec elles-mêmes ni entre elles. Désignons par T le plan des z ainsi découpé. Si pour une valeur arbitraire $z = z_0$ on attribue à $f(z)$ et $\varphi(z)$, ainsi qu'à leurs premières dérivées, des valeurs arbitraires, ces fonctions, ainsi que ζ, se trouvent déterminées uniformément dans toute l'étendue de T. En franchissant successivement les diverses coupures $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ dans un ordre quelconque et un nombre quelconque de fois chacune, on obtient des surfaces que l'on peut désigner par $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Ces surfaces sont en nombre infini quand les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas algébriques. Dans chacune de ces surfaces T_i, ζ est une fonction uniforme de z. Établissons maintenant au moyen 336] de l'équation (F.) la représentation des diverses feuilles $T, T_1, T_2, \ldots$ sur le plan des ζ. Soit désignée par S_i la surface qui représente ainsi sur le plan des ζ la surface T_i. Tant que, sur une feuille T_i, $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis, c'est-à-dire infinis pour toute valeur de z, S_i, qui correspond à T_i, remplira également une surface, soit que T_i provienne d'un nombre fini de transgressions des coupures $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$, soit qu'il provienne d'un nombre infini. Au contraire, si $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis sur une feuille T_i provenant d'un nombre infini de transgressions des coupures q, la représentante S_i de T_i se réduira en un point.

L'ensemble des représentantes $S, S_1, S_2, \ldots$ forme une surface non découpée (zusammenhängend) dans le plan des ζ. Celles de ces représentantes qui ne correspondent pas à des surfaces T_i sur laquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis n'admettent pas de points de ramification d'après les développements de mon Mémoire (p. 158—160 de votre Journal[1])); l'ensemble de ces représentantes constitue donc sur le plan des ζ une surface σ, qui couvre ce plan partout simplement. Sur les bornes de cette surface σ se trouvent les points qui jouent le rôle des représentantes des surfaces T dans l'intérieur desquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont iden-

[1]) P. 198—202 de ce volume. Sch.

tiquement infinis parce que ces points peuvent être obtenus par le passage à la limite des surfaces qui constituent σ.

Le sens de la proposition I. de mon travail (p. 161 de votre Journal[1])) revient maintenant à ce que z est une fonction méromophe de ζ dans l'intérieur de la surface σ. De là découle le corollaire immédiatement suivant, dont il est fait usage dans la partie ultérieure du même travail, que $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ ne peut pas admettre une même valeur pour deux valeurs différentes de z, étant supposé nécessairement que ce quotient n'est pas indépendant de z, ou, ce qui est la même chose, que $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis.

Si maintenant un des points limites est entouré en tous sens par des surfaces S, il faut, en dehors des restrictions déjà mentionnées, qu'une autre relation ait lieu encore entre les constantes contenues dans les coefficients de l'équation différentielle.

Heidelberg, 7. juin 1880.

---

1) P. 203 de ce volume. Sch.

XXXV.

ÜBER FUNCTIONEN ZWEIER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE ZWEIER GEGEBENER FUNCTIONEN ENTSTEHN.

(Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 27, Mathematische Klasse, 2, S. 1—39.)

In der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 8. Januar 1881.

In einer Mittheilung, enthalten in den Nachrichten der Königl. Ge- [1
sellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Februar 1880, p. 170 sqq.[1]), habe ich Functionen mehrerer Variabeln definirt, welche der Umkehrung von Integralen der Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen ihre Entstehung verdanken. Ich habe daselbst und ausführlicher in BORCHARDTS Journal Bd. 89, p. 151 sqq.[2]) ein Beispiel derartiger Functionen geliefert, indem ich für den Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewisse Einschränkungen machte. Später habe ich in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften (Juni 1880, p. 445 sqq.[3]) die Tabelle derjenigen Differentialgleichungen aufgestellt, welche diesen Einschränkungen entsprechen, und in dieser Tabelle zugleich die Integrale dieser Differentialgleichungen angegeben.

Indem ich nun bemüht war, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzufinden, welchen die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu genügen haben, um durch die erwähnte Umkehrung zwei Functionen zweier unabhängiger Variabeln zu ergeben, von der Beschaffenheit

---

[1]) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.

[3]) Abh. XXXII, S. 219 ff. dieses Bandes. Sch.

dass jede symmetrische Function jener Functionen eine eindeutige Function dieser Variabeln werde, gelangte ich zu einer Verallgemeinerung des Problems, indem ich an die Stelle der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter 2] Ordnung gewisse näher charakterisirte Functionen setzte. Im Folgenden erlaube ich mir die Lösung dieses Problems für die so charakterisirten Functionen zu geben. — Zu diesen Functionen gehören beispielsweise die Lösungen linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (also auch die algebraischen Functionen, welche immer solchen Differentialgleichungen genügen), so dass in dem Folgenden auch die Beantwortung des speciellen Problems enthalten ist, die Beschaffenheit dieser Lösungen anzugeben, damit durch die Umkehrung ihrer Integrale zwei Functionen zweier Variabeln entstehen, deren symmetrische Functionen sich eindeutig verhalten.

1.

Es seien $f(z)$, $\varphi(z)$ zwei Functionen von z, deren Quotient nicht einen constanten Werth habe, und welche für jeden Werth der unabhängigen Variabeln eine endliche oder eine unendliche Anzahl bestimmter Werthe annehmen und für jeden Werth $z = a$ dieser Veränderlichen, für den sie unendlich werden oder sich verzweigen, und ebenso für $z = \infty$ Entwickelungen zulassen nach ganzen Potenzen resp. von

$$(z-a)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (n \text{ eine positive ganze Zahl})$$

mit nur einer endlichen Anzahl negativer Exponenten und Producten solcher Potenzen mit ganzen positiven Potenzen resp. von $\log(z-a)$ und $\log\frac{1}{z}$, deren Exponenten eine endliche Zahl nicht übersteigen. Hierbei machen wir jedoch die Einschränkung, dass die kleinsten Exponenten der mit logarithmischen Factoren behafteten Potenzen von $z-a$ und $\frac{1}{z}$ die negative, resp. die positive Einheit nicht überschreiten. Wir wollen die Werthe a im Folgenden als singuläre Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ bezeichnen.

Wenn z unzählig viele Umläufe vollzieht, so kann der Quotient

$$\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

einen von z unabhängigen Werth annehmen. Wir wollen im Folgenden solche

Werthe von ζ kurz mit γ bezeichnen. Wir setzen voraus, dass alsdann wenigstens eine der Functionen $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ nach Vollziehung dieser [3 Umläufe für jeden Werth von z unendlich gross wird. Wenn ausserdem nach Vollziehung einer endlichen Anzahl von Umläufen für einen Werth $z = b$, ζ einen der Werthe γ erhält, so soll ebenfalls wenigstens eine der Functionen $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = b$ unendlich gross sein.

Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen können wir annehmen, dass für jeden singulären Punkt a und für $z = \infty$ die in den Exponenten der verschiedenen Potenzen von $z-a$, resp. $\frac{1}{z}$ auftretenden Brüche gleichen Nenner haben, und zwar für beide Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, denselben, da wenn dieses nicht der Fall ist, man als Nenner n das kleinste Vielfache der verschiedenen Nenner einführen kann.

Ein Beispiel derartiger Functionen liefern die Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichungen von der in meiner Abhandlung Bd. 66 des BORCHARDTschen Journals p. 146[1]) Gl. (12.) characterisirten Gattung.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, damit die durch die Gleichungen

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} \int_{\delta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2 \end{cases}$$

— worin δ_1, δ_2 willkürliche Constanten, für welche den Grössen

$$f(\delta_1),\ f(\delta_2),\ \varphi(\delta_1),\ \varphi(\delta_2)$$

bestimmte Werthe zugeschrieben werden, und die zwischen denselben Grenzen in beiden Gleichungen sich erstreckenden Integrationen längs desselben Weges auszuführen sind — definirten Functionen z_1, z_2 der willkürlichen Veränderlichen u_1, u_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung werden, deren Coefficienten in der Umgebung aller endlichen Werthenpaare dieser Veränderlichen sich eindeutig verhalten.

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

4] 2.

Es sei in der Umgebung von $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$

$$(1.) \qquad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1-\delta_1) + \cdots, \\ \varphi(z_1) = \alpha_0' + \alpha_1'(z_1-\delta_1) + \cdots, \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2-\delta_2) + \cdots, \\ \varphi(z_2) = \beta_0' + \beta_1'(z_2-\delta_2) + \cdots, \end{cases}$$

so ergeben die Gleichungen (A.)

$$(2.) \qquad \begin{cases} \alpha_0(z_1-\delta_1) + \beta_0(z_2-\delta_2) + \cdots = u_1, \\ \alpha_0'(z_1-\delta_1) + \beta_0'(z_2-\delta_2) + \cdots = u_2. \end{cases}$$

Da δ_1, δ_2 willkürliche Grössen bedeuten, und da $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ der Voraussetzung gemäss nicht einen constanten Werth hat, so kann man voraussetzen, dass die Grösse $\alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0$ von Null verschieden sei. Alsdann ergeben sich (cf. JACOBI in CRELLES Journal Bd. 6, p. 274 [1])) für $z_1-\delta_1$, $z_2-\delta_2$ Entwickelungen nach positiven ganzen Potenzen von u_1, u_2, welche in der Umgebung von $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ gültig sind. Diese Entwickelungen definiren zunächst die Functionen z_1, z_2 in dieser Umgebung. Indem wir nun u_1, u_2 auf willkürlichen von einander unabhängigen Wegen von 0, 0 ausgehend fortsetzen, werden z_1, z_2 sich auf entsprechenden Wegen fortsetzen und in den Umgebungen der durchlaufenen Werthe von u_1, u_2 holomorph sein, so lange keine der Grössen z_1, z_2 unendlich geworden, oder mit einem der singulären Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ coincidirt, so lange ferner nicht einer der Quotienten

$$\zeta_1 = \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \qquad \zeta_2 = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

einen der Werthe γ erreicht, endlich so lange z_1, z_2 nicht solche Werthe erhalten haben, für welche die Gleichung

$$(B.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Denn sind $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ Werthe, welche diesen Einschränkungen unterliegen, und welche den Werthen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen, so folgt

[1]) Jacobis Werke, Bd. 6 (1891), S. 47. Sch.

auf dieselbe Weise, wie wir es für die Umgebung von $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ nach- [5 gewiesen, dass $z_1 - b_1$, $z_2 - b_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ sich nach ganzen positiven Potenzen von $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ entwickeln lassen.

Da u_1, u_2 von einander unabhängige Veränderliche sind, so hat man die Stellen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, für welche eine der Grössen z_1, z_2 mit gewissen singulären Punkten der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, wozu unter Umständen der unendlich ferne Punkt gehört, coincidirt, oder eine der Grössen ζ_1, ζ_2 gleich einem Werthe γ wird, oder endlich z_1, z_2 der Gleichung (B.) genügen, nur dann einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen, wenn z_1, z_2 in die angegebenen Werthe einrücken, ohne dass zwischen den letzten Wegelementen, mit welchen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 eintreffen, eine bestimmte Beziehung vorausgesetzt werden muss.

Wenn dagegen keiner der angegebenen Werthe von z_1, z_2 für

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2$$

erreicht werden kann, ohne dass zwischen den letzten Wegelementen der Veränderlichen u_1, u_2 eine Beziehung vorausgesetzt wird, so müssen die Functionen z_1, z_2 der unabhängigen Veränderlichen u_1, u_2 in diesen Stellen auch andere als die genannten Ausnahmswerthe annehmen, also bei Umkreisung dieser Stellen, so lange u_1, u_2 von einander unabhängig bleiben, sich eindeutig verhalten, in diesen Stellen jedoch unbestimmt werden.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, bemerken wir, dass wir im Folgenden voraussetzen können, dass für $f(z)$, $\varphi(z)$ in den zur Umgebung eines singulären Punktes dieser Functionen oder eines nicht singulären Punktes derselben oder endlich des unendlich fernen Punktes gehörigen Entwickelungen die niedrigsten Dimensionen der Glieder übereinstimmen, und dass wenn ζ mit einem der Werthe γ coincidirt, $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ gleichzeitig unendlich werden. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so seien

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \gamma_{11} f(z) + \gamma_{12} \varphi(z), \\ \varphi_1(z) &= \gamma_{21} f(z) + \gamma_{22} \varphi(z), \end{aligned}$$

wo $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ willkürliche Grössen bedeuten. Setzt man alsdann

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} w_1 = \gamma_{11} u_1 + \gamma_{12} u_2, \\ w_2 = \gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2 \end{cases}$$

6] so gehen die Gleichungen (A.) über in

$$(A'.)\qquad \begin{cases} \int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z)\,dz = w_1, \\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi_1(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi_1(z)\,dz = w_2. \end{cases}$$

Es haben nunmehr $f_1(z)$ und $\varphi_1(z)$ wegen der Willkürlichkeit von $\gamma_{11} \dots \gamma_{22}$ die verlangte Eigenschaft, und es sind die symmetrischen Functionen von z_1, z_2 alsdann in der Umgebung bestimmter Werthe von u_1, u_2 eindeutig, wenn dieselben Functionen in der Umgebung der entsprechenden Werthe von w_1, w_2 eindeutig sind, und wenn andererseits die letzten Wegelemente, mit welchen w_1, w_2 in gewisse Werthe w_1', w_2' einrücken, von einander abhängig werden, so werden dadurch auch bestimmte Beziehungen zwischen den letzten Wegelementen, mit welchen u_1, u_2 in die w_1', w_2' entsprechenden Werthe von u_1, u_2 eintreffen, festgestellt.

3.

Zunächst ergiebt sich der Satz:

I. Die Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden.

Es sei in der That $z = b$ zunächst ein nicht singulärer Werth der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, für welchen beide gleichzeitig verschwinden, und man habe in der Umgebung von $z = b$

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(z) = \alpha_k(z-b)^k + \alpha_{k+1}(z-b)^{k+1} + \cdots, \\ \varphi(z) = \alpha_k'(z-b)^k + \alpha_{k+1}'(z-b)^{k+1} + \cdots, \end{cases}$$

wo k eine positive ganze Zahl.

Es bezeichne $z = c$ einen willkürlichen ebenfalls nicht singulären Werth von z, in dessen Umgebung

$$(1a.)\qquad \begin{cases} f(z) = \beta_0 + \beta_1(z-c) + \cdots, \\ \varphi(z) = \beta_0' + \beta_1'(z-c) + \cdots, \end{cases}$$

7] und es mögen den Werthen $z_1 = b$, $z_2 = c$ die Stellen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ ent-

sprechen, alsdann folgt aus den Gleichungen (A.)

$$(2.)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = \frac{\alpha_k}{k+1}(z_1-b)^{k+1} + \beta_0(z_2-c) + \frac{\alpha_{k+1}}{k+2}(z_1-b)^{k+2} + \frac{\beta_1}{2}(z_2-c)^2 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \frac{\alpha'_k}{k+1}(z_1-b)^{k+1} + \beta'_0(z_2-c) + \frac{\alpha'_{k+1}}{k+2}(z_1-b)^{k+2} + \frac{\beta'_1}{2}(z_2-c)^2 + \cdots. \end{cases}$$

Lassen wir nunmehr z_1-b und z_2-c derartig unendlich klein werden, dass

$$(3.)\qquad z_2 - c = \xi(z_1-b)^{k+1} + \eta,$$

wo ξ eine beliebige Grösse, η eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung als $(z_1-b)^{k+1}$ werde, so wird ξ derart bestimmt werden können, dass

$$u_2 - v_2 - \lambda(u_1 - v_1)$$

unendlich klein höherer Ordnung als $(z_1-b)^{k+1}$ wird, wenn man mit λ einen beliebig gegebenen Werth bezeichnet. In der That ergiebt sich ξ aus der Gleichung

$$(4.)\qquad \xi(\beta'_0 - \lambda\beta_0) + \frac{\alpha'_k - \lambda\alpha_k}{k+1} = 0.$$

Da $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ nicht constant ist, so kann man $z_2 = c$ so wählen, dass keine der Gleichungen

$$\beta'_0 - \lambda\beta_0 = 0, \quad \alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0 = 0$$

erfüllt werde. Alsdann ist ξ eine endliche bestimmte Grösse, wenn λ einen endlichen Werth hat, und es sind die Grössen

$$\beta_0\xi + \frac{\alpha_k}{k+1}, \quad \beta'_0\xi + \frac{\alpha'_k}{k+1}$$

von Null verschieden. Demnach stellen u_1-v_1, u_2-v_2 unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung mit $(z_1-b)^{k+1}$ vor, während $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ den willkürlich gegebenen [s Werth λ erhält. Hieraus folgt zunächst, dass z_1, z_2 resp. die Werthe b, c annehmen, wenn die letzten Wegelemente, mit welchen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 einrücken, von einander unabhängig sind.

Andererseits folgt aus den Gleichungen (2.)

$$(u_2-v_2)\beta_0 - (u_1-v_1)\beta'_0 = \frac{1}{k+1}(\alpha'_k\beta_0 - \alpha_k\beta'_0)(z_1-b)^{k+1}$$

bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung. Da der Coefficient von

$(z_1-b)^{k+1}$ in dieser Gleichung nicht verschwindet, so folgt

$$(5.) \qquad z_1-b = \sqrt[k+1]{\frac{(u_2-v_2)\beta_0-(u_1-v_1)\beta_0'}{\alpha_k'\beta_0-\alpha_k\beta_0'}}\,(k+1),$$

d. h. z_1 erhält $k+1$ von c verschiedene Werthe, wenn u_1, u_2 resp. um v_1, v_2 Umläufe vollziehen. Es sind deshalb z_1+z_2, z_1z_2 in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ nicht eindeutig, wenn $k\geqq 1$. Hieraus folgt, dass $f(z)$ und $\varphi(z)$ nicht für einen nicht singulären Werth b gleichzeitig verschwinden dürfen.

Es sei nunmehr a ein singulärer Punkt von der Beschaffenheit, dass $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$.

In diesem Falle enthalten nach den Voraussetzungen der No. 1 die Entwickelungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z=a$ keine Logarithmen. Enthalten diese Entwickelungen die ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, so setzen wir

$$(z-a)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Es sei in der Umgebung von $z=a$

$$(6.) \qquad \begin{cases} f(z) = \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \cdots, \\ \varphi(z) = \alpha_k' t^k + \alpha_{k+1}' t^{k+1} + \cdots. \end{cases}$$

9] Lässt man z_1 in a einrücken und gleichzeitig z_2 in einen beliebigen nicht singulären Punkt c, und bezeichnet wieder die zugehörigen Werthe von u_1, u_2 mit v_1, v_2, so ergiebt sich auf dieselbe Weise wie in dem eben behandelten Falle, wo z_1 in den nicht singulären Punkt b einrückte, dass $t_1=(z_1-a)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, $k+n$ von c verschiedene Werthe annimmt. Demnach sind z_1+z_2, z_1z_2 in der Umgebung dieser Werthe nicht eindeutig, wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ für $z=a$ gleichzeitig verschwinden.

Der am Anfang dieser No. ausgesprochene Satz ist hierdurch bewiesen.

Ist in Gl. (6.)

$$k+n>0,$$

so können demnach z_1+z_2, z_1z_2 nur dann in der Umgebung von $u_1=v_1$, $u_2=v_2$ eindeutig sein, wenn $k+n=1$, also

$$k=-(n-1).$$

Es ergiebt sich demnach der Satz:

II. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in den Entwickelungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung eines singulären Punktes a ist eine negative Zahl, welche entweder die negative Einheit nicht überschreitet oder den Werth $-\frac{n-1}{n}$ hat (n pos. ganze Zahl).

Es sei in der Umgebung von $z=\infty$ der Exponent der niedrigsten Potenz in den Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ grösser als die positive Einheit. Alsdann enthalten nach No. 1 diese Entwickelungen keine Logarithmen. Treten in denselben die ganzen Potenzen von $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ auf, so setzen wir

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}} = t.$$

Es sei

$$(7.) \qquad \begin{cases} f(z) = \alpha_k t^k + \alpha_{k+1} t^{k+1} + \cdots, \\ \varphi(z) = \alpha_k' t^k + \alpha_{k+1}' t^{k+1} + \cdots. \end{cases}$$ [10

Lässt man z_1 unendlich werden, während z_2 mit einem willkürlichen nicht singulären Punkte c zusammenfällt, und bezeichnet wieder die zugehörigen Werthe von u_1, u_2 mit v_1, v_2, so folgert man wie in dem Falle eines endlichen singulären Werthes, dass $t_1 = \left(\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $k-n$ von c verschiedene Werthe annimmt, dass also z_1+z_2, $z_1 z_2$ in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ nicht eindeutig sind, wenn $k-n>1$. Hieraus folgt:

III. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ in den Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z=\infty$ ist entweder eine Zahl, welche die positive Einheit nicht überschreitet, oder derselbe hat den Werth $1+\frac{1}{n}$ (n pos. ganze Zahl).

4.

Es mögen sich nunmehr z_1, z_2 den von einander verschiedenen Werthen b_1, b_2 annähern, welche nicht zu den singulären Punkten gehören, aber der Gleichung (B.) genügen.

Es sei in der Umgebung von $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ resp.

$$(1.)\quad \begin{cases} f(z_1) = \alpha_0 + \alpha_1(z_1-b_1) + \alpha_2(z_1-b_1)^2 + \cdots, \\ \varphi(z_1) = \alpha_0' + \alpha_1'(z_1-b_1) + \alpha_2'(z_1-b_1)^2 + \cdots, \\ f(z_2) = \beta_0 + \beta_1(z_2-b_2) + \beta_2(z_2-b_2)^2 + \cdots, \\ \varphi(z_2) = \beta_0' + \beta_1'(z_2-b_2) + \beta_2'(z_2-b_2)^2 + \cdots, \end{cases}$$

so sind nach dem Satze I. voriger No. nicht gleichzeitig α_0 und α_0' oder β_0 [11] und β_0' Null. Wir können daher nach der Bemerkung am Schlusse der No. 2 voraussetzen, dass α_0, α_0', β_0, β_0' sämmtlich von Null verschieden sind. Aus den Gleichungen (A.) folgt, wenn $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ die Werthe $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ entsprechen,

$$(2.)\quad \begin{cases} u_1 - v_1 = \alpha_0(z_1-b_1) + \beta_0(z_2-b_2) + \frac{\alpha_1}{2}(z_1-b_1)^2 + \frac{\beta_1}{2}(z_2-b_2)^2 \\ \qquad\qquad + \frac{\alpha_2}{3}(z_1-b_1)^3 + \frac{\beta_2}{3}(z_2-b_2)^3 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \alpha_0'(z_1-b_1) + \beta_0'(z_2-b_2) + \frac{\alpha_1'}{2}(z_1-b_1)^2 + \frac{\beta_1'}{2}(z_2-b_2)^2 \\ \qquad\qquad + \frac{\alpha_2'}{3}(z_1-b_1)^3 + \frac{\beta_2'}{3}(z_2-b_2)^3 + \cdots. \end{cases}$$

Der Voraussetzung gemäss findet die Gleichung:

$$(3.)\qquad \alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0 = 0$$

statt.

Wenn z_1, z_2 sich resp. den Werthen b_1, b_2 annähern, ohne dass die Gleichung

$$(4.)\qquad \alpha_0(z_1-b_1) + \beta_0(z_2-b_2) = 0$$

erfüllt wird, so werden u_1-v_1, u_2-v_2 unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung mit derjenigen der beiden unendlich kleinen Grössen z_1-b_1, z_2-b_2, welche von der niedrigeren Ordnung ist. Es sei z_2-b_2 von gleicher oder höherer Ordnung als z_1-b_1. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (2.) mit β_0', die zweite mit β_0 und subtrahirt, so folgt nach Gleichung (3.)

$$(5.)\quad \beta_0'(u_1-v_1) - \beta_0(u_2-v_2) = \tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta_0' - \alpha_1'\beta_0)(z_1-b_1)^2 + \tfrac{1}{2}(\beta_1\beta_0' - \beta_1'\beta_0)(z_2-b_2)^2 + \cdots$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist demnach von höherer Ordnung als u_1-v_1, u_2-v_2, d. h. man muss

$$(6.)\qquad \beta_0'(u_1-v_1) - \beta_0(u_2-v_2) = 0$$

setzen. Welches daher auch die letzten Elemente der Wege sind, auf [12
welchen z_1, z_2 in b_1, b_2 eintreten — wenn sie nicht in der durch die Gleichung (4.) angegebenen Beziehung stehen —, so findet zwischen den zugehörigen letzten Wegelementen von u_1, u_2 die bleibende Relation (6.) statt.

Von einander unabhängig können die ebengenannten Wegelemente von u_1, u_2 nur werden, wenn zwischen den unendlich kleinen Grössen z_1-b_1, z_2-b_2 die Relation (4.) besteht, oder was auf dasselbe hinauskommt, wenn

$$t = \alpha_0(z_1-b_1)+\beta_0(z_2-b_2) \tag{7.}$$

eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung als jede der Grössen z_1-b_1, z_2-b_2 ist, welche gleich hohe Ordnung besitzen.

Führen wir die Bezeichnung aus Gl. (7.) in (2.) ein und setzen

$$-\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \varepsilon, \qquad \frac{\beta_0'}{\beta_0} = \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} = \lambda, \tag{8.}$$

so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} u_1-v_1 &= t+\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2)(z_1-b_1)^2+\varepsilon\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t+\frac{1}{2}\frac{\beta_1}{\beta_0^2}t^2+\cdots,\\ u_2-v_2 &= \lambda t+\frac{1}{2}(\alpha_1'+\beta_1'\varepsilon^2)(z_1-b_1)^2+\varepsilon\frac{\beta_1'}{\beta_0}(z_1-b_1)t+\frac{1}{2}\frac{\beta_1'}{\beta_0^2}t^2+\cdots. \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

Man kann t so unendlich klein werden lassen, dass

$$t = \xi(z_1-b_1)^2, \tag{10.}$$

wo ξ eine willkürlich bestimmte Grösse bedeutet. Aus den Gleichungen (9.) ergiebt sich dann bis auf unendlich kleine Grössen:

$$\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1} = \frac{\lambda\xi+\frac{1}{2}(\alpha_1'+\beta_1'\varepsilon^2)}{\xi+\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2)}. \tag{11.}$$

Indem man ξ stetig ändernd dasselbe alle möglichen Werthe durch- [13
laufen lässt, nimmt $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ jeden beliebigen Werth an, also treffen z_1, z_2 resp. in b_1, b_2 ein, welches auch die letzten Wegelemente sind, mit denen u_1, u_2 resp. in v_1, v_2 einrücken, wenn nicht die Gleichung

$$\alpha_1'+\beta'\varepsilon^2-\lambda(\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2) = 0 \tag{12.}$$

stattfindet, in welchem Falle das Verhältniss $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ in Gleichung (11.) einen von ξ unabhängigen Werth erhält.

Andererseits folgt, wenn man das Verhältniss $\frac{u_2-v_2}{u_1-v_1}$ willkürlich annimmt, aus Gleichung (9.) bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung

$$(13.) \qquad u_2-v_2-\lambda(u_1-v_1) = \tfrac{1}{2}[\alpha_1'+\beta_1'\varepsilon^2-\lambda(\alpha_1+\beta_1\varepsilon^2)](z_1-b_1)^2.$$

Diese Gleichung lieferte demnach in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ zwei von b_2 verschiedene Werthe von z_1, und es könnten deshalb z_1+z_2 und z_1z_2 in dieser Umgebung nicht eindeutig sein, wenn nicht die Gleichung (12.) erfüllt wäre.

Findet demnach die Relation (4.) statt, so erfordert die Eindeutigkeit von z_1+z_2, z_1z_2 auch das Bestehen der Relation (12.).

Setzt man

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z), \qquad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z)$$

und

$$(14.) \qquad \varphi'(z)f(z)-\varphi(z)f'(z) = F(z),$$

so geht die Gleichung (12.) über in

$$(15.) \qquad F(b_1)f(b_2)^2+F(b_2)f(b_1)^2 = 0.$$

Da b_1, b_2 ein willkürliches Werthenpaar bedeutete, welches der Gleichung (B.) genügt, so folgt:

14] I. Die Eindeutigkeit von z_1+z_2, z_1z_2 als Functionen von u_1, u_2 erfordert, dass für alle Werthenpaare z_1, z_2, welche der Gleichung (B.) genügen, die Gleichung

$$(C.) \qquad F(z_1)f(z_2)^2+F(z_2)f(z_1)^2 = 0$$

erfüllt werde.

Es sei durch die Gleichung

$$(D.) \qquad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$$

z als Function von ζ definirt. Aus dieser ergiebt sich

$$(E.) \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f(z)^2}{F(z)}.$$

Sind z_1, z_2 zwei Zweige der Function z von ζ, so hat man

$$(16.) \qquad \frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)}, \qquad \frac{dz_2}{d\zeta} = \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt mit Hülfe von Gleichung (C.)

$$\text{(F.)} \qquad \frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0.$$

Da andererseits die Gleichung

$$\text{(G.)} \qquad \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

stattfindet, so ergiebt sich aus Gleichung (F.) auch

$$\text{(F'.)} \qquad \frac{dz_1}{d\zeta} \varphi(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} \varphi(z_2) = 0.$$

Es sei

$$z_1 = g_1(\zeta), \quad b_1 = g_1(\alpha),$$
$$z_2 = g_2(\zeta), \quad b_2 = g_2(\alpha).$$

Setzt man in die Gleichungen (2.)

$$z_1 - b_1 = g_1(\zeta) - g_1(\alpha),$$
$$z_2 - b_2 = g_2(\zeta) - g_2(\alpha),$$

[15

so wird den Gleichungen (F.), (F'.) entsprechend die rechte Seite identisch Null, d. h. für jeden Werth von ζ.

Demnach wird auch, wenn man mit Rücksicht darauf, dass t (Gleichung (7.)) unendlich klein höherer Ordnung werden muss, in Gleichung (2.)

$$\text{(17.)} \qquad \begin{cases} z_1 - b_1 = dz_1 = g_1'(\alpha)\, d\zeta, \\ z_2 - b_2 = \delta z_2 = dz_2 + \nu dz_2, \\ dz_2 = g_2'(\alpha)\, d\zeta \end{cases}$$

substituirt, wo ν eine unendlich kleine Grösse und wo $g_i'(\zeta) = \frac{dg_i(\zeta)}{d\zeta}$,

$$\text{(18.)} \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = du_1 = \nu dz_2\, f(b_2) + dz_2^2 (2\nu + \nu^2) \dfrac{f'(b_2)}{2} + \cdots, \\ u_2 - v_2 = du_2 = \nu dz_2\, \varphi(b_2) + dz_2^2 (2\nu + \nu^2) \dfrac{\varphi'(b_2)}{2} + \cdots. \end{cases}$$

Es sind also du_1, du_2 von gleicher Ordnung mit νdz_2. Multiplicirt man die erste Gleichung (18.) mit $\varphi(b_2)$, die zweite mit $f(b_2)$ und subtrahirt, so ist

$$\text{(19.)} \qquad \varphi(b_2)\, du_1 - f(b_2)\, du_2 = -\nu dz_2^2 F(b_2) + \cdots.$$

Demnach ist die linke Seite von der Ordnung von νdz_2^2, oder es ist

$$\varphi(b_2)\,du_1 - f(b_2)\,du_2 = 0. \tag{20.}$$

Hieraus ergiebt sich:

II. Ist für jedes System von Lösungen $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$ der Gleichung (B.) die Gleichung (C.) erfüllt, so können z_1, z_2 nicht in b_1, b_2 einrücken, wenn die letzten Wegelemente auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 anlangen, von einander unabhängig sind.

16] 5.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ werde, wo b einen nicht singulären Punkt, a einen solchen singulären Punkt bezeichnet, für welchen $\int f(z)dz, \int \varphi(z)dz$ endliche Werthe erhalten, und gleichzeitig die Gleichung (B.) durch $z_1 = a$, $z_2 = b$ erfüllt werde.

Nach Satz II. in No. 3 ist alsdann der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in den Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$, welche nach No. 1 keine Logarithmen enthalten, von der Form $-\frac{n-1}{n}$ (n pos. ganze Zahl).

Setzt man daher

$$\left\{\begin{array}{l} (z-a)^{\frac{1}{n}} = t, \\ nf(z)\,t^{n-1} = f_1(t), \quad n\varphi(z)\,t^{n-1} = \varphi_1(t) \end{array}\right. \tag{1.}$$

und substituirt in den Gleichungen (A.)

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = a + t_1^n, & z_2 = a + t_2^n, \\ \delta_1 = a + \eta_1^n, & \delta_2 = a + \eta_2^n, \end{array}\right. \tag{2.}$$

so verwandeln sich dieselben in

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\eta_1}^{t_1} f_1(t)\,dt + \int_{\eta_2}^{t_2} f_1(t)\,dt = u_1, \\ \displaystyle\int_{\eta_1}^{t_1} \varphi_1(t)\,dt + \int_{\eta_2}^{t_2} \varphi_1(t)\,dt = u_2. \end{array}\right. \tag{A''.}$$

Wenn $z_1 = a$, $z_2 = b$ wird, so wird

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \beta = \sqrt[n]{b-a},$$

und es sind nunmehr $t = 0$, $t = \beta$ keine singulären Punkte der Functionen $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$. Damit t_1 in 0, t_2 in β nur unter Voraussetzung einer gewissen Beziehung zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v einrücken, anlangen können, ist vermöge derselben Discussion wie in der [17 vorigen No. erforderlich, dass gleichzeitig mit der Gleichung

$$\frac{\varphi_1(0)}{f_1(0)} = \frac{\varphi_1(\beta)}{f_1(\beta)} \tag{3.}$$

die Gleichung

$$F_1(0) f_1(\beta)^2 + F_1(\beta) f_1(0)^2 = 0 \tag{4.}$$

erfüllt werde, wo

$$F_1(t) = \varphi_1'(t) f_1(t) - \varphi_1(t) f_1'(t). \tag{5.}$$

Da aber

$$F_1(t) = n^2 t^{2(n-1)} F(z), \tag{6.}$$

so besagt die Gleichung (4.), dass die Gleichung (C.) auch für $z_1 = a$, $z_2 = b$ bestehen müsse.

Umgekehrt folgt wie in voriger No., dass wenn diese Bedingung erfüllt ist, z_1 in a, z_2 in b nur anlangen, wenn zwischen den letzten Wegelementen, auf denen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, eine Beziehung besteht.

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich: Wenn für

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad z_1 = a_1, \quad z_2 = a_2,$$

wo a_1, a_2 zwei verschiedene singuläre Punkte bedeuten, wovon auch einer mit dem unendlich fernen Punkte coincidiren kann, und wenn vorausgesetzt wird, dass $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ die Gleichung (B.) befriedigen, und dass $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = a_1$, $z = a_2$ endlich sind, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass z_1, z_2 die angegebenen Werthe nur unter der Voraussetzung gewisser Relationen zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, erreichen können, dass diese Werthenpaare $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ gleichzeitig die Gleichung (C.) befriedigen.

6.

Wenn für

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2$$

z_1, z_2 einen gleichen Werth b annehmen, so können $f(z_1), f(z_2)$ resp. $\varphi(z_1), \varphi(z_2)$ 18] verschiedene Werthe erreichen. Diese Werthe seien $f(b), \varphi(b)$ für $z_1 = b$ und $f_1(b), \varphi_1(b)$ für $z_2 = b$. Findet nun die Gleichung (B.) für $z_1 = z = b$ statt, d. h.

$$\text{(1.)} \qquad \begin{vmatrix} f(b) & f_1(b) \\ \varphi(b) & \varphi_1(b) \end{vmatrix} = 0,$$

so muss nach der Schlussweise von No. 4, wenn man

$$\text{(2.)} \qquad [F(z_1)]_{z_1 = b} = F(b), \quad [F(z_2)]_{z_2 = b} = F_1(b)$$

setzt, die Gleichung

$$\text{(3.)} \qquad F(b)f_1(b)^2 + F_1(b)f(b)^2 = 0$$

erfüllt sein.

Die Gleichung (1.) kann unter den angegebenen Umständen nur erfüllt werden, wenn z als Function von ζ betrachtet, für einen gewissen Umlauf der letzteren Veränderlichen zu seinem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, ohne dass gleichzeitig $f(z)$ und $\varphi(z)$ zu ihren Werthen zurückkehren. Findet dieses statt, und sei z ein einem willkürlichen Werthe von ζ entsprechender Werth, $f(z), \varphi(z)$ die zugehörigen Werthe der beiden Functionen, $f_1(z), \varphi_1(z)$ die Werthe, in welche dieselben nach dem angegebenen Umlaufe von ζ übergehen, wenn z zu seinem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, alsdann ergiebt sich nach Gleichung (3.), dass für einen willkürlichen Werth von z die Gleichung

$$\text{(H.)} \qquad F(z)f_1(z)^2 + F_1(z)f(z)^2 = 0$$

bestehen muss.

Durch denen der No. 4 analoge Betrachtungen ergiebt sich alsdann, dass z_1, z_2 den gemeinschaftlichen Werth nicht erreichen können, wenn nicht zwischen den letzten Wegelementen von u_1, u_2 eine Relation besteht.

Aus Betrachtungen, welche denen der vorigen Nummer analog sind, ergiebt sich ebenfalls, dass die Gleichung (H.) für singuläre und unendlich

grosse Werthe von z in gleicher Weise wie für nicht singuläre besteht, und dass auch z_1, z_2 einen gemeinsamen so beschaffenen Werth nicht erreichen [19 können, ohne dass gleichzeitig $f(z_1) = f(z_2)$, $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ werde, wenn nicht zwischen den letzten Wegelementen von u_1, u_2 eine Relation besteht.

7.

Lässt man u_1, u_2 willkürliche Wege durchlaufen und setzt längs derselben die Functionen z_1, z_2 stetig fort, so möge für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, wo v_1, v_2 endliche Werthe bedeuten, einer oder beide der Quotienten

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

einen der mit γ bezeichneten Werthe annehmen, oder eine oder beide der Functionen z_1, z_2 solche singuläre Werthe der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ erreichen, dass eines oder beide der Integralwerthenpaare

$$\int f(z_1)\,dz_1, \ \int \varphi(z_1)\,dz_1, \ \int f(z_2)\,dz_2, \ \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

unendlich werde, ohne dass z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen.

Es seien, wenn die Fortsetzungen z. B. mittelst Kreisen vollzogen werden, K_1, K_2 die ersten Kreise resp. für die Variabeln u_1, u_2, auf deren Peripherien $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ werden. Es haben alsdann innerhalb dieser Kreise K_1, K_2 und in beliebig kleiner, aber nicht unendlich kleiner Entfernung von v_1, v_2

$$\int f(z_1)\,dz_1, \ \int \varphi(z_1)\,dz_1, \ \int f(z_2)\,dz_2, \ \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

endliche Werthe. — Seien demnach $v_1 - \varepsilon_1, v_2 - \varepsilon_2$ Werthe von u_1, u_2 resp. innerhalb K_1, K_2, beliebig nahe an v_1, v_2, und mögen diesem Werthenpaare u_1, u_2 die Werthe b_1, b_2 von z_1, z_2 entsprechen. Führen die beiden Wege Γ_1, Γ_2 für u_1, u_2 von $v_1 - \varepsilon_1$ in v_1, resp. $v_2 - \varepsilon_2$ in v_2, so mögen z_1, z_2 gleichzeitig resp. auf den Wegen W_1, W_2 in c_1, c_2 anlangen. Es ist zu bemerken, dass die Wegstrecken W_1, W_2 unendlich lang sein können, während die entsprechenden Strecken auf Γ_1, Γ_2 beliebig klein sind. Sind $v_1 - \varepsilon_1 + \lambda_1, v_2 - \varepsilon_2 + \lambda_2$ Werthe von u_1, u_2 zwischen $v_1 - \varepsilon_1$ und v_1, resp. $v_2 - \varepsilon_2$ und v_2 längs Γ_1, Γ_2, und c_1', c_2' die zugehörigen Werthe von z_1, z_2 längs W_1, W_2, so folgt, dass

20]
$$\sigma_1 = \int_{b_1}^{c_1'} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{c_2'} f(z)\,dz,$$
$$\sigma_2 = \int_{b_1}^{c_1'} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{c_2'} \varphi(z)\,dz$$

beliebig kleine Werthe annehmen müssen.

Nach der Voraussetzung ist für $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ wenigstens einer der Quotienten

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

gleich einem der mit γ bezeichneten Werthe. Es wird also nach No. 2 wenigstens je einer der Summanden von σ_1, σ_2 unendlich werden, wenn b_1, c_1'; b_2, c_2' längs W_1, W_2 sich c_1, c_2 annähern, folglich wird auch jedesmal der andere Summand unendlich.

Oder es hat eine oder beide der Grössen z_1, z_2 einen solchen singulären Werth der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ erreicht, dass eines oder beide der Integralwerthenpaare

$$\int f(z_1)\,dz_1, \quad \int \varphi(z_1)\,dz_1, \quad \int f(z_2)\,dz_2, \quad \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

unendlich werden, ohne dass z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen, dann gilt dasselbe.

Da aber σ_1, σ_2 beliebig klein werden, so folgt, dass die Werthenreihen c_1', c_2' längs W_1, W_2 beliebig wenig verschieden von Werthenpaaren z_1, z_2 sind, welche den Gleichungen

(1.)
$$\begin{cases} \int_{b_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} f(z)\,dz = 0, \\ \int_{b_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{b_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = 0 \end{cases}$$

genügen. Stetige Reihen von Werthenpaaren z_1, z_2 welche den Gleichungen (1.) genügen, befriedigen aber die Gleichung

(2.)
$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

21] und ausserdem entweder die Gleichung (C.) oder die Gleichung (H.). Dem-

nach müssten c_1', c_2' beliebig wenig von einem Werthenpaare verschieden sein, welches gleichzeitig den Gleichungen (B.) und (C.) oder (H.) Genüge leistet. Nach No. 4 bis 6 werden aber solche Werthenpaare nur erreicht, wenn u_1, u_2 von einander abhängige Wege beschreiben.

Da andererseits nicht z_1, z_2 sich gleichzeitig ein und demselben Werthe der angegebenen Art annähern können, wenn gleichzeitig $f(z_1)$ und $f(z_2)$ so wie $\varphi(z_1)$ und $\varphi(z_2)$ ein und denselben Werth anstreben, ohne dass u_1, u_2 unendlich gross werden, so ergiebt sich der Satz:

Für **willkürliche** Wege von u_1, u_2 können für endliche Werthe dieser Variabeln nicht solche Werthe z_1, z_2 erreicht werden, dass einer oder beide der Quotienten

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

einen der mit γ bezeichneten Werthe annehmen, und auch nicht solche singuläre Werthe z_1, z_2 der Functionen $f(z), \varphi(z)$, für welche eines oder beide der Integralwerthenpaare

$$\int f(z_1)\,dz_1, \ \int \varphi(z_1)\,dz_1, \ \int f(z_2)\,dz_2, \ \int \varphi(z_2)\,dz_2$$

unendlich werden, ohne dass die Variabeln z_1, z_2 unendlich viele Umläufe vollzogen haben.

8.

Aus Gleichung (F.) ergiebt sich:

I. Die Function z von ζ kann nicht mehr als zweiwerthig sein.

Denn wären z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Zweige der Function z von ζ, so wäre nach Gleichung (F.)

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0,$$

$$\frac{dz_1}{d\zeta} f(z_1) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0,$$

also

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) - \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0. \tag{1.}$$

[22

Andererseits ist nach derselben Gleichung (F.)

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) + \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0. \tag{2.}$$

Es müsste demnach

$$\frac{dz_2}{d\zeta} f(z_2) = 0, \qquad \frac{dz_3}{d\zeta} f(z_3) = 0$$

sein, d. h. es müsste z von ζ unabhängig sein, was für willkürliche Werthe von ζ nicht stattfindet.

Dividirt man die Gleichung (H.) durch $F(z)F_1(z)$ und setzt nach Gleichung (E.)

$$\frac{f(z)^2}{F(z)} = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{f_1(z)^2}{F_1(z)}, \tag{3.}$$

so folgt

$$\frac{dz}{d\zeta}[f(z) + f_1(z)] = 0 \tag{4.}$$

oder

$$f(z) + f_1(z) = 0. \tag{J.}$$

Nach Satz I. ist

$$z = P(\zeta) + Q(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}, \tag{K.}$$

wo $P(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta)$ eindeutige Functionen von ζ sind.

Setzen wir

$$f(z)^2 = g(\zeta), \tag{5.}$$

so folgt aus der Gleichung (J.), dass einem gegebenen Werthenpaare $\zeta, \sqrt{R(\zeta)}$ ein einziger Werth von $g(\zeta)$ entspricht. Ebenso entspricht ein einziger bestimmter Werth dieser Function einem Werthenpaare $\zeta, -\sqrt{R(\zeta)}$. Wir wollen denselben mit $g_1(\zeta)$ bezeichnen. Alsdann ist

23]

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\zeta) + g_1(\zeta) = 2S(\zeta), \\ \dfrac{g(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}} - \dfrac{g_1(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}} = 2T(\zeta), \end{array} \right. \tag{6.}$$

wo $S(\zeta), T(\zeta)$ eindeutige Functionen von ζ bedeuten.

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (6.) mit $\sqrt{R(\zeta)}$ und addirt die beiden Gleichungen, so folgt:

(L.) $$f(z)^2 = g(\zeta) = S(\zeta) + T(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}.$$

Setzt man

(K'.) $$\frac{d\zeta}{dz} = P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

wo $P_1(\zeta)$, $Q_1(\zeta)$ nach Gleichung (K.) eindeutige Functionen von ζ sind, so folgt aus Gleichung (F.), dass

(7.) $$t = \frac{f(z)}{\sqrt{R(\zeta)}\,[P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]}$$

als Function von ζ aufgefasst durch die Umläufe von ζ, welche $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführen, ungeändert bleibt. Dieselbe Eigenschaft besitzt danach auch t^2. Daher ist nach Gleichung (L.) t^2 eine eindeutige Function von ζ. Setzen wir demgemäss

(8.) $$t = \sqrt{R_1(\zeta)},$$

so folgt:

(L'.) $$f(z) = [Q_1(\zeta)\,R(\zeta) + P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]\sqrt{R_1(\zeta)},$$

wo $R_1(\zeta)$ eine eindeutige Function von ζ, und $\sqrt{R_1(\zeta)}$ durch die Umläufe von ζ, welche $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführen, ungeändert bleibt.

Aus Gleichung (E.) und den Gleichungen (K.) und (L.) ergiebt sich

(M.) $$F(z) = W(\zeta) + U(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

wo $W(\zeta)$, $U(\zeta)$ eindeutige Functionen von ζ.

II. Demnach sind die Functionen $f(z)^2$ und $F(z)$ zweiwerthige [24] Functionen von ζ, welche durch die Umläufe von ζ gleichzeitig mit z unverändert bleiben oder geändert werden.

9.

Betrachtet man z als Function von ζ, so folgt aus den Gleichungen (C.) und (H.), dass $\frac{f(z)^2}{F(z)}$ für dasselbe ζ nur zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe annimmt. Es ist also

(N.) $$\frac{f(z)^2}{F(z)} = \sqrt{\Psi(\zeta)},$$

wo $\Psi(\zeta)$ eine eindeutige Function von ζ darstellt. Es ist nämlich nach Gl. (7.) und (8.) vor. No.

$$(N'.) \qquad \Psi(\zeta) = R(\zeta) R_1(\zeta).$$

Ein Umlauf von ζ, welcher $\sqrt{R(\zeta)}$ in $-\sqrt{R(\zeta)}$ überführt, führt daher auch $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in $-\sqrt{\Psi(\zeta)}$ über.

Transformirt man die Gleichung (A.) in die Variable ζ und bezeichnet mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ zwei Werthe von ζ, welche resp. $z_1 = \delta_1$, $z_2 = \delta_2$ entsprechen, so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$(A_1.) \qquad \begin{cases} \int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta = u_1, \\ \int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta \sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta \sqrt{\Psi(\zeta)}\, d\zeta = u_2. \end{cases}$$

10.

Für diejenigen Werthe von ζ, welche wir mit γ bezeichnet haben, erhält z jeden beliebigen Werth (s. No. 1), es sind daher diese Werthe γ singuläre 25] Punkte der Function z von ζ (Gl. (K.)), von solcher Beschaffenheit, dass eine Entwickelung von z nach steigenden Potenzen von $\zeta - \alpha$ mit nur einer endlichen Anzahl von Potenzen mit negativen Exponenten nicht möglich ist. Wir wollen für solche singuläre Punkte dieselbe Bezeichnung wesentlich singuläre Punkte anwenden, welche Herr Weierstrass für eindeutige Functionen angewendet hat (Abh. der Berliner Akademie Jahrg. 1876, p. 11—15[1]).

Da die Functionen $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ in einem wesentlich singulären Punkte jeden beliebigen Werth annehmen (cf. Weierstrass l. c. p. 59—60[2]), so ergiebt sich, dass $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$ für einen solchen Punkt von z unabhängig werden muss.

Demnach sind die Werthe $\zeta = \gamma$ die einzigen wesentlich singulären Punkte der Function z von ζ.

Ist $\zeta = \alpha$ ein Werth, welcher mit keinem der wesentlich singulären Punkte coincidirt, und $z = a$ einer der beiden Werthe von z, welche ihm

---

1) Weierstrass' Werke, Bd. II (1895), S. 77 ff.. Sch.

2) Ebenda S. 122—124. Sch.

nach Gl. (K.) entsprechen, so ist in der Umgebung von $\zeta = \alpha$

$$(1.)\quad z-a = c_{-k}(\zeta-\alpha)^{-\frac{k}{2}} + c_{-(k-1)}(\zeta-\alpha)^{-\frac{k-1}{2}} + \cdots + c_0 + c_1(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2(\zeta-\alpha)^{\frac{2}{2}} + \cdots,$$

wo die Anzahl der Glieder mit negativen Exponenten eine endliche mit k bezeichnete Grösse ist.

Ist a ein singulärer Punkt der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, so ist nach No. 1 in der Umgebung von $z = a$

$$(2.)\quad f(z)^s = P_0 + P_1 \log(z-a) + P_2[\log(z-a)]^2 + \cdots + P_\lambda[\log(z-a)]^\lambda,$$

wo $P_0, P_1, \ldots, P_\lambda$ in der Umgebung von $z = a$ nach ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{m}}$ entwickelt sind, mit nur einer endlichen Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten.

Aus Gl. (1.) folgt

$$(3.)\quad z-a = (\zeta-\alpha)^{-\frac{k}{2}}\chi(\zeta), \qquad [26$$

wo $\chi(\zeta)$ für $\zeta = \alpha$ weder Null noch unendlich, und demnach $\log\chi(\zeta)$ nach positiven ganzen Potenzen von $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ entwickelbar ist.

Demnach ist

$$(4.)\quad f(z)^s = P_0' + P_1' \log(\zeta-\alpha) + P_2'[\log(\zeta-\alpha)]^2 + \cdots + P_\lambda'[\log(\zeta-\alpha)]^\lambda,$$

wenn man

$$(5.)\quad \left(-\frac{k}{2}\right)^i \{P_i + P_{i+1}(i+1)_1 \log\chi(\zeta) + P_{i+2}(i+2)_2[\log\chi(\zeta)]^2 + \cdots + P_\lambda \lambda_{\lambda-i}[\log\chi(\zeta)]^{\lambda-i}\} = P_i',$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2\ldots l} = m_l$$

setzt. Die Coefficienten $P_0', P_1', \ldots, P_\lambda'$ sind nach steigenden Potenzen von $\zeta-\alpha$ mit rationalen Exponenten entwickelbar, so dass Glieder mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl auftreten.

Nach Satz II. No. 8 ist aber $f(z)^s$ eine zweiwerthige Function von ζ, erhält also bei Umläufen von ζ um α nur zwei Werthe, während die rechte Seite der Gleichung (4.) durch Wiederholung dieser Umläufe unendlich viele Werthe annimmt. Demnach muss

$$P_1' = 0, \quad P_2' = 0, \quad \ldots, \quad P_\lambda' = 0$$

sein. Hieraus folgt aber

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \ldots, \quad P_\lambda = 0. \tag{6.}$$

Demnach enthält die Entwickelung von $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen. Da $\varphi(z)^s = \zeta^s f(z)^s$ ebenfalls eine zweiwerthige Function von ζ ist, so folgt, dass auch die Entwickelung von $\varphi(z)$ keine Logarithmen enthält.

Aus der Gl. (4.) ergiebt sich

$$f(z)^s = P'_0, \tag{7.}$$

d. h. es ist auch $f(z)^s$ in der Umgebung von $\zeta = \alpha$ nach steigenden Potenzen 27] von $\zeta - \alpha$ mit rationalen Exponenten entwickelbar, derart dass die Anzahl der Glieder mit negativen Exponenten eine endliche ist.

Demnach ist $\zeta = \alpha$ auch kein wesentlich singulärer Punkt für die Function $f(z)^s$ von ζ.

Es sei nunmehr

$$\begin{cases} f(z) = e_\mu (z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \cdots, \\ \varphi(z) = e'_\mu (z-a)^{\frac{\mu}{n}} + e'_{\mu+1}(z-a)^{\frac{\mu+1}{n}} + \cdots, \end{cases} \tag{8.}$$

wo e_μ, e'_μ von Null verschieden sind. Setzt man

$$\frac{e'_\mu}{e_\mu} = \alpha$$

und entwickelt $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ nach steigenden Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, so erhält man

$$\zeta - \alpha = \varrho_1 (z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2 (z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots, \tag{9.}$$

wo

$$\varrho_1 = \frac{e_\mu e'_{\mu+1} - e_{\mu+1} e'_\mu}{e_\mu^2}.$$

Ist der Coefficient ϱ_1 nicht Null, so folgt, dass $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ in der Umgebung von $\zeta = \alpha$ eindeutig ist. Ist dagegen $\varrho_1 = 0$, so kann ϱ_2 nicht verschwinden, weil sonst $z-a$ in der Umgebung von $\zeta = \alpha$ mehr als zwei Werthe annehmen würde, was mit dem Satze I. in No. 8 in Widerspruch stände.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so erhält man den Satz:

I. Die Functionen z und $f(z)$ von ζ haben dieselben wesentlich singulären Punkte, und zwar sind es diejenigen Werthe $\zeta = \gamma$, für welche

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \gamma$$

für jeden Werth von z. Die beiden Werthe von z, welche einem nicht wesentlich singulären Punkte $\zeta = \alpha$ der Function z von ζ entsprechen, sind entweder nicht singuläre Punkte der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ oder solche singuläre Punkte a, dass die für [28 die Umgebung von a gültigen Entwickelungen von $f(z)$, $\varphi(z)$ keine Logarithmen enthalten, und dass in der Entwickelung nach steigenden Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \varrho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

nicht gleichzeitig ϱ_1 und ϱ_2 verschwinden. Einem Werthe z, für welchen $\int f(z)dz$, $\int \varphi(z)dz$ endliche Werthe erhalten, entsprechen nur nicht wesentlich singuläre Werthe der Function z von ζ.

Es ist zu bemerken, dass hier $z = \infty$ den singulären Punkten beigezählt worden ist.

Aus der Gleichung

$$\zeta - \alpha = \varrho_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \varrho_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots \tag{10.}$$

folgt für $\frac{dz}{d\zeta}$

a) in dem Falle, dass ϱ_1 von Null verschieden ist,

$$\frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{1}{n}}\left\{\varkappa_0 + \varkappa_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right\}, \tag{11.}$$

b) in dem Falle aber, dass ϱ_1 verschwindet,

$$\frac{dz}{d\zeta} = (z-a)^{1-\frac{2}{n}}\left\{\lambda_0 + \lambda_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right\}, \tag{11a.}$$

wo $\varkappa_0$, λ_0 von Null verschiedene Grössen bedeuten.

Bezeichnen wir mit μ den Exponenten der niedrigsten Potenz von $z-a$ in der Entwickelung von $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$, so ist nach

Satz II. No. 3

$$\mu = \frac{-n-k+1}{n},$$

wo k die Null oder eine positive ganze Zahl bedeutet. Es folgt daher aus Gl. (E.), dass im Falle a)

29] (12.) $$\frac{f(z)^s}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k}{n}}\left[\varkappa_0' + \varkappa_1'(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right],$$

im Falle b)

(12a.) $$\frac{f(z)^s}{F(z)} = (z-a)^{-\frac{k+1}{n}}\left[\lambda_0' + \lambda_1'(z-a)^{\frac{1}{n}} + \cdots\right].$$

Im Falle a) ergiebt sich aus Gl. (10.) $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ als eindeutige Function von $\zeta-\alpha$

(13.) $$(z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1(\zeta-\alpha) + \mu_2(\zeta-\alpha)^2 + \cdots.$$

Im Falle b) wird $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ eine eindeutige Function von $(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}$

(14.) $$(z-a)^{\frac{1}{n}} = \mu_1'(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \mu_2'(\zeta-\alpha)^{\frac{2}{2}} + \cdots,$$

wo μ_1, μ_1' von Null verschiedene Grössen bedeuten.

Demnach ist nach Gl. (N.) in der Umgebung von $\zeta = \alpha$ im Falle a)

(15.) $$\sqrt{\psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-k}\left\{\varkappa_0'' + \varkappa_1''(\zeta-\alpha) + \cdots\right\},$$

im Falle b)

(15a.) $$\sqrt{\psi(\zeta)} = (\zeta-\alpha)^{-\frac{k+1}{2}}\left\{\lambda_0'' + \lambda_1''(\zeta-\alpha) + \cdots\right\},$$

wo $\varkappa_0''$, λ_0'' von Null verschieden sind.

Diese Gleichungen finden auch statt, wenn $\zeta = \alpha$, $z = \infty$ entspricht (s. Satz III. No. 3).

Hieraus folgt

II. Die nicht wesentlich singulären Punkte der Function z von ζ sind auch nicht wesentlich singuläre Punkte der Function $\Psi(\zeta)$.

Sei $\zeta = \beta$ ein nicht wesentlich singulärer Punkt der Function z von ζ, für welchen $\Psi(\zeta)$ unendlich wird, von der Art, dass die $\zeta = \beta$ entsprechenden beiden Werthe von z nicht zu den singulären Punkten der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$

gehören. Ist $z = b$ einer dieser Werthe, so muss nach Gl. (N.) $F(b) = 0$ [30 sein und $F(z)$ in der Umgebung von $z = b$ die Entwickelung haben:

$$F(z) = (z-b)^l[\nu_0 + \nu_1(z-b) + \cdots], \tag{16.}$$

wo l eine positive ganze Zahl und ν_0 von Null verschieden ist. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden:

α) Es ist $f(b)$ von Null verschieden. Alsdann ergiebt die Gleichung (E.) in der Umgebung von $\zeta = \beta$

$$\frac{d\zeta}{dz} = (z-b)^l[\nu_0' + \nu_1'(z-b) + \cdots], \tag{17.}$$

wo ν_0' von Null verschieden. Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$\zeta - \beta = \frac{\nu_0'}{l+1}(z-b)^{l+1} + \cdots.$$

Da $z-b$ eine eindeutige Function von $(\zeta-\beta)^{\frac{1}{l}}$, so folgt, dass

$$\left\{\begin{array}{l} l = 1 \text{ und} \\ z-b = \nu_0''(\zeta-\beta)^{\frac{1}{l}} + \nu_1''(\zeta-\beta)^{\frac{2}{l}} + \cdots, \end{array}\right. \tag{18.}$$

wo ν_0'' von Null verschieden. Durch Substitution dieses Werthes in $\frac{f(z)^2}{F(z)}$ folgt, dass in der Umgebung von $\zeta = \beta$

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_{-1}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{l}} + \varrho_1(\zeta-\beta)^{\frac{1}{l}} + \cdots, \tag{19.}$$

wo ϱ_{-1} von Null verschieden.

β) Es sei $f(b) = 0$. Da nach Satz I. No. 3 nicht gleichzeitig $\varphi(b) = 0$ sein kann, so folgt, dass in diesem Falle ζ unendlich gross wird. Gehört nun $\zeta = \infty$ nicht zu den wesentlich singulären Punkten von z als Function von ζ, und ist in der Umgebung von $z = b$

$$f(z) = (z-b)^m\{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(z-b) + \cdots\},$$

wo ε_0 von Null verschieden, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{\zeta} \tag{20.}$$

$$(z-b)^m\{\varepsilon_0' + \varepsilon_1'(z-b) + \cdots\} = \frac{1}{\zeta}, \tag{21.}$$ [31

wo ε_0' von Null verschieden. Da $z-b$ eine einwerthige Function von $\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{l}}$ in

der Umgebung von $\zeta = \infty$ ist, so folgt: entweder

$$\text{(18a.)} \qquad \begin{cases} m = 1 \text{ und} \\ z - b = \varepsilon_1''\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \varepsilon_2''\left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 + \cdots \end{cases}$$

oder

$$\text{(18b.)} \qquad \begin{cases} m = 2 \text{ und} \\ z - b = \varepsilon_1''\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2''\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{2}{2}} + \cdots, \end{cases}$$

ε_1'' in beiden Fällen von Null verschieden.

Ist $\varphi(b) = \gamma_0$, so ist γ_0 von Null verschieden, und man erhält

$$F(z) = -m\varepsilon_0\gamma_0(z-b)^{m-1} + \cdots,$$

also

$$\frac{f(z)^2}{F(z)} = -\frac{\varepsilon_0^2 m}{\gamma_0}(z-b)^{2m+1} + \cdots.$$

Substituirt man hierin die Werthe (18a.) und (18b.), so folgt, dass in der Umgebung von $\zeta = \infty$ entweder

$$\text{(22.)} \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \varrho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \cdots$$

oder

$$\text{(22a.)} \qquad \sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \varrho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \cdots.$$

Demnach ist im Falle β) $\Psi(\zeta)$ nicht unendlich.

Es sei nunmehr $\zeta = \beta$ ein Werth, welcher nicht zu den wesentlich singulären Punkten von z als Function von ζ gehört, und wiederum von der Beschaffenheit, dass die beiden ihm entsprechenden Werthe von z nicht zu den 32] singulären Punkten der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ gehören, und für welchen $\Psi(\zeta)$ verschwindet. Ist b einer der beiden zu $\zeta = \beta$ gehörigen Werthe von z, so muss nach Gl. (N.) $f(b) = 0$ sein. Da aber nach Satz I. No. 3 nicht gleichzeitig $\varphi(b)$ verschwindet, so ergiebt sich, dass $\beta = \infty$ sein müsse.

Ist demnach $\zeta = \infty$ nicht ein wesentlich singulärer Punkt der Function z von ζ, und wird vorausgesetzt, dass $\Psi(\infty) = 0$, und bedeutet $z = b$ einen der beiden Werthe von z, welche $\zeta = \infty$ entsprechen (nach der in No. 2 gemachten Bemerkung entspricht $\zeta = \infty$, wenn dieser Punkt nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ gehört, keinem singu-

lären Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$), so ergeben sich eben dieselben Gleichungen (20.)—(22a.). Die vorhergehende Untersuchung ergiebt den folgenden Satz:

III. Es sei $\zeta = \beta$ ein endlicher Werth, welcher nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ gehört.

Ist einer der beiden Werthe von z, welche $\zeta = \beta$ entsprechen, ein singulärer Punkt a der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, und bezeichnet man den Exponenten der niedrigsten Potenz von $z-a$ in den für $f(z)$, $\varphi(z)$ in der Umgebung von a bestehenden Entwickelungen mit $\frac{-n-k+1}{n}$, wo $k = 0$ oder eine ganze positive Zahl, so bleibt $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ entweder mit $(\zeta-\beta)^k$ oder mit $(\zeta-\beta)^{\frac{k+1}{2}}$ multiplicirt in der Umgebung von $\zeta = \beta$ eindeutig und für $\zeta = \beta$ endlich und von Null verschieden. Es ist der erstere Multiplicator oder der zweite anzuwenden, je nachdem z in der Umgebung von $\zeta = \beta$ einwerthig oder zweiwerthig ist. — Dasselbe findet statt, wenn $a = \infty$ und der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ mit $\frac{n+1-k}{n}$ bezeichnet wird.

Entspricht dem $\zeta = \beta$ ein nicht singulärer Werth $z = b$ der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, und ist $\Psi(\beta) = \infty$, so ist $(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der [33 Umgebung von $\zeta = \beta$ eindeutig und für $\zeta = \beta$ endlich und von Null verschieden.

Die Function $\Psi(\zeta)$ kann für keinen endlichen Werth von ζ verschwinden. Gehört $\zeta = \infty$ nicht zu den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ, so ist $\zeta^3\sqrt{\Psi(\zeta)}$ oder $\zeta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = \infty$ eindeutig und für $\zeta = \infty$ endlich und von Null verschieden, je nachdem z in der Umgebung von $\zeta = \infty$ ein- oder zweiwerthig ist.

11.

Nach den in No. 2 bis 7 angestellten Untersuchungen verbleibt uns noch das Verhalten von z_1, z_2 als Functionen von u_1, u_2 zu untersuchen, in der Umgebung solcher Werthe $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, für welche

$$z_1 = z_2 = a, \quad f(z_1) = f(z_2) = f(a), \quad \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \varphi(a)$$

werden, sei es dass a nicht unendlich wird oder mit einem singulären Punkte der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ zusammenfällt, sei es dass a mit einem solchen Punkte zusammenfällt oder unendlich wird, wenn nur $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = a$ nicht unendlich werden.

Ist $\zeta = \beta$ einer der Werthe von ζ, welche $z = a$ entsprechen, so ist nach Satz I. No. 10 β von den wesentlich singulären Punkten der Function z von ζ verschieden.

Ist a ein singulärer Punkt der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, so ergiebt sich aus der Forderung, dass $\int f(z)\,dz$, $\int \varphi(z)\,dz$ für $z = a$ nicht unendlich werden, nach den in No. 1 und 2 gemachten Voraussetzungen, dass die Entwickelungen von $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ keine Logarithmen enthalten, und dass nach Satz II. No. 3 der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ die Form $\frac{-n+1}{n}$ habe.

Es ist also in diesem Falle im Satze III. No. 10 $k = 0$, so dass diesem Satze gemäss in der Umgebung von $\zeta = \beta$ entweder

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\zeta-\beta) + \cdots \tag{1.}$$

oder

34] $$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varepsilon_{-1}(\zeta-\beta)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}} + \cdots, \tag{1a.}$$

wo ε_0, ε_{-1} von Null verschieden.

Ist $a = \infty$ oder ein nicht singulärer Punkt der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$, und β ein endlicher Werth, so hat nach demselben Satze $\sqrt{\Psi(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = \beta$ wiederum eine der beiden Entwickelungen (1.) oder (1a.).

Ist aber $\beta = \infty$, so ist entweder

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + \varrho_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)^4 + \cdots \tag{2.}$$

oder

$$\sqrt{\Psi(\zeta)} = \varrho_5\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} + \varrho_7\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{7}{2}} + \cdots, \tag{2a.}$$

ϱ_3, ϱ_5 von Null verschieden.

Wir setzen gemäss Gleichung (K.)

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= P(\zeta_1) + Q(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}, \\ z_2 &= P(\zeta_2) + Q(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)} \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

und gemäss Gleichung (N.)

$$(4.) \qquad \frac{f(z_1)^2}{F(z_1)} = \sqrt{\Psi(\zeta_1)}, \qquad \frac{f(z_2)^2}{F(z_2)} = \sqrt{\Psi(\zeta_2)}.$$

Der Voraussetzung gemäss ist $z_1 = z_2 = a$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$. Es erhalten also auch $\sqrt{R(\zeta_1)}$, $\sqrt{R(\zeta_2)}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ dasselbe Vorzeichen. Deshalb haben auch $\frac{dz_1}{d\zeta_1}$, $\frac{dz_2}{d\zeta_2}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ gleiche Werthe. Da aber vorausgesetzt worden, dass $f(z_1) = f(z_2) = f(a)$, so folgt aus der Gl. (E.) und den Gln. (4.), dass $\sqrt{\Psi(\zeta_1)}$, $\sqrt{\Psi(\zeta_2)}$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \beta$ dasselbe Vorzeichen erhalten.

Durch die Substitutionen (3.) verwandeln sich die Gleichungen (A.) in (A_1), und man erhält aus diesen in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$:

a) Wenn die Gleichung (1.) stattfindet: [35

$$(5.) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0(t_1 + t_2) + \frac{\varepsilon_1}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0(t_1 + t_2) + \frac{\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \cdots, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(6.) \qquad \zeta_1 - \beta = t_1, \quad \zeta_2 - \beta = t_2.$$

Da die Glieder der beiden Reihen die Form haben

$$\text{const.}\,(t_1^m + t_2^m),$$

so lassen sich dieselben so umformen, dass sie nach positiven ganzen Potenzen von

$$(7.) \qquad t_1 + t_2 = w_1, \quad t_1^2 + t_2^2 = w_2$$

entwickelt erscheinen:

$$(8.) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = \varepsilon_0 w_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} w_2 + \cdots, \\ u_2 - v_2 = \beta\varepsilon_0 w_1 + \frac{\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} w_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo wir bloss die Glieder erster Dimension verzeichnet haben.

Da $\varepsilon_0(\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \beta\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ von Null verschieden, so ergeben nach dem Satze von JACOBI, welchen wir in No. 2 citirt, die Gleichungen (8.) w_1, w_2 als nach positiven ganzen Potenzen von $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ fortschreitende Reihen.

Demnach sind w_1, w_2 in der Umgebung von $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ eindeutig, also haben $\zeta_1 + \zeta_2$ und $\zeta_1 \zeta_2$ dieselbe Eigenschaft.

b) Wenn die Gleichung (1a.) erfüllt ist, so folgt

$$(5a.) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = 2\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2) + \frac{2}{3}\varepsilon_1(t_1^3 + t_2^3) + \cdots, \\ u_2 - v_2 = 2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2) + \frac{2}{3}(\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})(t_1^3 + t_2^3) + \cdots, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

36] (6a.) $$(\zeta_1 - \beta)^{\frac{1}{3}} = t_1, \quad (\zeta_2 - \beta)^{\frac{1}{3}} = t_2.$$

Die Glieder der beiden Reihen haben die Form

$$\text{const.}\,(t_1^{2m+1} + t_2^{2m+1}).$$

Die sämmtlichen Glieder sind also durch $t_1 + t_2$ theilbar. Werden also $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, t_1, t_2 unendlich klein, so sind die Glieder, welche auf $2\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ resp. $2\beta\varepsilon_{-1}(t_1 + t_2)$ folgen, unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als diese letzteren. Demnach sind $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ gleicher Ordnung mit $t_1 + t_2$. Multiplicirt man die erste der Gln. (5a.) mit β und subtrahirt die zweite, so ergiebt sich, dass

$$\beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)$$

unendlich klein von höherer Ordnung als $t_1 + t_2$, demnach höherer Ordnung als $u_1 - v_1$ oder $u_2 - v_2$, d. h. es muss

$$(9.) \qquad \beta(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) = 0$$

sein.

Demnach rücken ζ_1, ζ_2 in denselben Werth β nur ein, wenn zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, die Relation (9.) besteht.

c) Für den Fall des Bestehens der Gleichung (2.) ergiebt sich:

$$(5b.) \qquad \begin{cases} u_1 - v_1 = -\frac{1}{2}\varrho_3(t_1^3 + t_2^3) - \frac{1}{5}\varrho_4(t_1^5 + t_2^5) - \cdots, \\ u_2 - v_2 = -\varrho_3(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}\varrho_4(t_1^3 + t_2^3) - \cdots, \end{cases}$$

wenn man

$$(6b.) \qquad \frac{1}{\zeta_1} = t_1, \quad \frac{1}{\zeta_2} = t_2$$

setzt.

Die Reihen (5b.) gestatten wieder eine derartige Umformung, dass sie nach positiven ganzen Potenzen von

(7a.) $$t_1+t_2=w_1,\quad t_1^2+t_2^2=w_2$$

entwickelt erscheinen:

(8a.) $$\begin{cases} u_1-v_1=-\frac{1}{2}\varrho_3 w_2+\cdots, \\ u_2-v_2=-\varrho_3 w_1-\frac{1}{2}\varrho_4 w_2-\cdots. \end{cases}$$ [37

Mit Hülfe des citirten Satzes von JACOBI folgt, dass w_1, w_2 sich in der Umgebung von $u_1=v_1, u_2=v_2$ nach ganzen positiven Potenzen von u_1-v_1, u_2-v_2 entwickeln lassen. Es sind demnach w_1, w_2, folglich auch $\zeta_1+\zeta_2$ und $\zeta_1\zeta_2$ in derselben Umgebung eindeutig.

d) Findet endlich die Gl. (2a.) statt, so ist

(5c.) $$\begin{cases} u_1-v_1=-\frac{2}{3}\varrho_5(t_1^3+t_2^3)-\frac{2}{5}\varrho_7(t_1^5+t_2^5)+\cdots, \\ u_2-v_2=-2\varrho_5(t_1+t_2)-\frac{2}{3}\varrho_7(t_1^3+t_2^3)+\cdots, \end{cases}$$

wenn man setzt:

(6c.) $$\zeta_1^{-\frac{1}{2}}=t_1,\quad \zeta_2^{-\frac{1}{2}}=t_2.$$

Die Glieder der Reihen sind sämmtlich durch t_1+t_2 theilbar. Werden also $u_1-v_1, u_2-v_2, t_1, t_2$ unendlich klein, so wird u_1-v_1 von höherer Ordnung als t_1+t_2, während u_2-v_2 von gleicher Ordnung mit t_1+t_2 ist. Es findet also wieder zwischen den letzten Wegelementen, auf welchen u_1, u_2 in v_1, v_2 eintreffen, eine Relation statt. Für willkürliche Wege von u_1, u_2 werden daher nicht ζ_1, ζ_2 gleichzeitig unendlich gross.

In der Umgebung von $\zeta=\beta$, wenn die Gleichung (1.) besteht, und von $\zeta=\infty$, wenn die Gleichung (2.) erfüllt ist, ist $\sqrt{\Psi(\zeta)}$, folglich nach einer Bemerkung in No. 9 auch $\sqrt{R(\zeta)}$ eindeutig.

Entspricht daher unter gleicher Voraussetzung den Werthen $\zeta_1=\zeta_2=\beta$ oder $\zeta_1=\zeta_2=\infty$ das Werthenpaar $u_1=v_1, u_2=v_2$, so werden $\sqrt{R(\zeta_1)}, \sqrt{R(\zeta_2)}$, wenn u_1, u_2 in hinlänglicher Nähe an v_1, v_2 um diese Werthe Umläufe vollziehen, ihr Vorzeichen nicht wechseln, daher

$$G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}+G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)},\quad G(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}\,G(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)}$$

in derselben Umgebung eindeutig sein, wenn $G(\zeta)$ eine eindeutige Function

von ζ bedeutet. Sind daher z_1, z_2 diejenigen Werthe von z, welche den Werthenpaaren $(\zeta_1, \sqrt{R(\zeta_1)})$, $(\zeta_2, \sqrt{R(\zeta_2)})$ nach den Gleichungen (3.) entsprechen, 38] so folgt, dass z_1+z_2 und $z_1 z_2$ in der Umgebung derselben Werthe u_1, u_2 eindeutig sind, in deren Umgebung sich $\zeta_1+\zeta_2$, $\zeta_1\zeta_2$ eindeutig verhalten.

12.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen geht hervor, dass unter der in No. 2 gemachten Voraussetzung die durch die Gln. (A.) definirten Functionen z_1, z_2 der Variabeln u_1, u_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten für endliche Werthe der willkürlichen Variabeln u_1, u_2 sich eindeutig verhalten. Wenn γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22} willkürliche Grössen bedeuten, so sind die Grössen

$$\gamma_{11}u_1+\gamma_{12}u_2, \quad \gamma_{21}u_1+\gamma_{22}u_2$$

endlich für jedes endliche Werthenpaar von u_1, u_2, unendlich, wenn eine oder beide der letzteren Grössen unendlich gross werden. Es sind also auch ohne die Voraussetzung von No. 2 z_1+z_2, z_1z_2 eindeutige Functionen von u_1, u_2 für alle endlichen Werthe dieser Veränderlichen.

Fassen wir nunmehr die Untersuchungen von No. 2 bis 7 und No. 11 zusammen, so ergiebt sich das folgende Resultat:

Damit die durch die Gleichungen (A.) definirten Functionen z_1, z_2 **der willkürlichen und von einander unabhängigen Variabeln** u_1, u_2 einer quadratischen Gleichung genügen, deren Coefficienten für alle endlichen Werthe dieser Variabeln sich eindeutig verhalten, wenn die Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ die in No. 1 angegebene Beschaffenheit haben, sind folgende nothwendige und hinreichende Bedingungen zu erfüllen: Die beiden Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in der Entwickelung von $\gamma f(z)+\delta\varphi(z)$ (γ, δ willkürliche Grössen) in der Umgebung eines singulären Punktes a der Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, muss eine negative Zahl sein, welche entweder die negative Einheit 39] nicht übersteigt, oder den Werth $-1+\frac{1}{n}$ hat (n eine positive ganze Zahl). Dagegen muss der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ in der für die Umgebung von $z=\infty$ gültigen Entwickelung von

$\gamma f(z)+\delta\varphi(z)$ entweder eine Zahl sein, welche die positive Einheit nicht übersteigt, oder den Werth $1+\frac{1}{n}$ hat (n eine positive ganze Zahl). Die durch die Gleichung (D.) definirte Function z von ζ darf nicht mehr als zweiwerthig sein (Gl. (K.)), während $f(z)$ als Function von ζ die durch die Gleichungen (L.), (L'.) festgesetzte Beschaffenheit haben muss.

Heidelberg, December 1880.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 242, Zeile 12 $\alpha_0\beta_0' - \alpha_0'\beta_0$ statt $a_0\beta_0' - a_0'\beta_0$,

„ 245, 246 in den Gleichungen (2.), (4.), (5.) und S. 245 in den Formeln Zeile 12, 9 und 2 v. u. α_k an Stelle von α_{k+1}, α_{k+1} an Stelle von α_{k+2} und α_k' an Stelle von α_{k+1}',

„ 249, Zeile 7 wenn statt dass,

„ „ , Gl. (9.) $+\varepsilon\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t$ statt $-\frac{\beta_1}{\beta_0}(z_1-b_1)t$

und $+\varepsilon\frac{\beta_1'}{\beta_0}(z_1-b_1)t$ statt $-\frac{\beta_1'}{\beta_0}(z_1-b_1)t$,

„ 253, Gl. (3.) $f_1(\beta)$ statt $\varphi_2(\beta)$,

„ 265, Zeile 9 v. u. β) Es sei statt Es sei β),

„ 266, „ 4 v. u. bedeutet $z = b$ einen statt es sei $z = b$ einer.

Es wurde hinzugefügt:

S. 252, Zeile 1 das zweite »von«,

„ 269, in der ersten der Gln. (5.) und

„ 271, in der zweiten der Gln. (8a.) $+\cdots$.

2) Eine französische Übersetzung dieser Abhandlung (von Herrn STEPHANOS) ist im Bulletin des Sciences mathématiques, 2e sér., t. V, 1881, S. 52—89 erschienen. SCH.

XXXVI.

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES QUI NAISSENT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DE DEUX FONCTIONS DONNÉES.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.)

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 92, Paris 1881.)

---

a.

(Séance du Lundi 6 Juin 1881, p. 1330—1331.)

J'ai publié sous ce titre, dans les Mémoires de la Société royale [1330 de Göttingue (t. XXVII)[1]), un travail dont voici les principaux résultats.

Je considère des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, uniformes ou non uniformes, qui admettent pour les points critiques $z = a$ et $z = \infty$ des développements suivant les puissances entières de

$$(z-a)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(n étant entier et positif), le nombre des termes où les exposants de ces puissances sont négatifs étant fini. J'admets encore que ces puissances puissent être multipliées par des puissances de $\log(z-a)$ ou $\log\frac{1}{z}$, dont les exposants entiers et positifs soient toujours finis. Enfin, je pose la restriction que les plus petits exposants de $z-a$ ou de $\frac{1}{z}$, dans les termes multipliés par des logarithmes, ne surpassent pas l'unité positive ou négative, ce qui revient à dire que les intégrales de ces termes sont respectivement infinies pour $z = a$ et $z = \infty$.

---

[1]) Mém. XXXV, p. 239 et suiv. de ce volume. Sch.

Si la variable z décrit un chemin entourant une infinité de fois une partie des points critiques, il peut arriver que le quotient

$$\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

prenne une valeur γ, indépendante de z. Je suppose alors que, z décrivant le même chemin, une au moins des intégrales

$$\int f(z)\,dz, \quad \int \varphi(z)\,dz$$

[1331] devienne infinie. De même, si pour une valeur déterminée $z = b$, et en suivant un chemin d'une étendue finie, ζ acquiert une de ces valeurs que je viens de désigner par γ, je suppose aussi qu'au moins une des intégrales

$$\int f(z)\,dz, \quad \int \varphi(z)\,dz$$

devient infinie pour $z = b$.

Cela étant, je me propose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2, définies par les équations

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} \int_{\delta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2, \end{cases}$$

satisfassent à une équation du second degré dont les coefficients soient uniformes pour toutes les valeurs finies des variables u_1, u_2.

Les fonctions z_1, z_2 ne pourraient cesser d'être holomorphes que lorsque u_1, u_2 deviennent égales respectivement aux valeurs v_1, v_2 pour lesquelles l'une ou l'autre des quantités z_1, z_2 devient infinie ou égale à un des points critiques des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, ou bien quand un des quotients

$$\zeta_1 = \frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)}, \qquad \zeta_2 = \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

acquiert une valeur γ indépendante de z_1 ou z_2, ou enfin lorsque les quantités z_1, z_2 sont liées par l'équation

$$\text{(B.)} \qquad f(z_1)\varphi(z_2) - f(z_2)\varphi(z_1) = 0.$$

Mais ici l'on doit faire une remarque importante, qui constitue une distinction caractéristique entre les fonctions d'une seule variable et celles de plusieurs variables, et dont il suffit de donner l'explication pour notre exemple. Ou les valeurs de z_1, z_2 qui correspondent aux valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ peuvent être atteintes quels que soient les derniers éléments des chemins par lesquels les variables u_1, u_2 tendent aux points v_1, v_2: alors les points v_1, v_2 peuvent être des points de ramification des fonctions

$$z_1 + z_2,\ z_1 z_2$$

de u_1, u_2, c'est à dire qui ont la propriété que, u_1, u_2 tournant autour de v_1, v_2 les fonctions

$$z_1 + z_2,\ z_1 z_2$$

changent de valeurs. Ou ces valeurs de z_1, z_2 ne peuvent être atteintes qu'en supposant une relation entre les derniers éléments des chemins de u_1, u_2: alors les points v_1, v_2 ne peuvent être que des points d'indétermination, mais non de ramification, parce que l'on suppose que les variables u_1, u sont indépendantes l'une de l'autre.

---

b.

(Séance du Lundi 13 Juin 1881, p. 1401—1403.)

Je montre d'abord que les fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ ne doivent être zéro [1401 pour une même valeur finie de la variable z et que l'exposant le plus petit de $z-a$ dans les développements de $f(z)$, $\varphi(z)$ dans le voisinage d'un point singulier a de ces fonctions doit être un nombre négatif qui ou ne surpasse pas l'unité négative ou, si la puissance n'est pas multipliée par un facteur logarithmique, peut aussi avoir la valeur $-\frac{n-1}{n}$ (n nombre entier positif), et de même l'exposant le plus petit de $\frac{1}{z}$ dans les développements dans le voisinage de $z = \infty$ est un nombre qui ou ne surpasse pas l'unité positive ou, si la puissance n'est pas multipliée par un facteur logarithmique, peut aussi avoir la valeur $1+\frac{1}{n}$ (n nombre entier positif).

Je recherche alors quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les valeurs

$$u_1 = v_1,\quad u_2 = v_2$$

auxquelles correspondent des valeurs z_1, z_2 liées par l'équation (B.) ne soient pas des points de ramification pour les fonctions

$$z_1 + z_2,\ z_1 z_2,$$

et je trouve, en posant

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} f(z) - \frac{df(z)}{dz} \varphi(z) = F(z),$$

les conditions que voici:

Tout système z_1, z_2 qui satisfait à l'équation (B.) doit aussi satisfaire à l'équation

(C.) $$F(z_1) f(z_2)^3 + F(z_2) f(z_1)^3 = 0.$$

Je montre alors que, pour des valeurs finies

$$u_1 = v_1,\quad u_2 = v_2,$$

aucun des quotients

$$\frac{\varphi(z_1)}{f(z_1)},\quad \frac{\varphi(z_2)}{f(z_2)}$$

ne peut atteindre une des valeurs que j'ai désignées ci-dessus par γ, et aucune des intégrales

$$\int f(z_1)\,dz_1,\ \int \varphi(z_1)\,dz_1,\ \int f(z_2)\,dz_2,\ \int \varphi(z_2)\,dz_2,$$

en supposant les chemins d'intégration finis, ne devient infinie, sinon il y a une relation entre les derniers éléments des chemins par lesquels u_1, u_2 tendent aux points v_1, v_2.

1402] La coexistence des équations (B.) et (C.) entraîne les théorèmes suivants:

En posant

(D.) $$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta,$$

et considérant z comme fonction de ζ, z doit avoir au plus deux valeurs pour une valeur donnée de ζ; donc

(E.) $$z = P(\zeta) + Q(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

où $P(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta)$ sont fonctions uniformes de ζ.

De même, la fonction $f(z)^3$, comme fonction de ζ, n'a pas plus de deux valeurs pour une valeur donnée de ζ; donc

(F.) $$f(z)^3 = S(\zeta) + T(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

$S(\zeta), T(\zeta)$ étant fonctions uniformes de ζ.

On a de même, pour $f(z)$

$$(G.) \qquad f(z) = [Q_1(\zeta) R(\zeta) + P_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)}]\sqrt{R_1(\zeta)},$$

en posant

$$\frac{d\zeta}{dz} = P_1(\zeta) + Q_1(\zeta)\sqrt{R(\zeta)},$$

$R_1(\zeta)$ étant une fonction uniforme de ζ telle que les chemins de la variable ζ, qui changent $\sqrt{R(\zeta)}$ en $-\sqrt{R(\zeta)}$, ne changent pas la fonction $\sqrt{R_1(\zeta)}$.

En posant

$$(H.) \qquad \begin{cases} z_1 = P(\zeta_1) + Q(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}, \\ z_2 = P(\zeta_2) + Q(\zeta_2)\sqrt{R(\zeta_2)} \end{cases}$$

et

$$(J.) \qquad \psi(\zeta) = R(\zeta) R_1(\zeta),$$

les équations (A.) se transforment en

$$(A_1.) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \sqrt{\psi(\zeta)}\, d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \sqrt{\psi(\zeta)}\, d\zeta = u_1, \\ \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} \zeta\sqrt{\psi(\zeta)}\, d\zeta + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} \zeta\sqrt{\psi(\zeta)}\, d\zeta = u_2, \end{cases}$$

en désignant par ε_1, ε_2 deux valeurs de ζ correspondantes aux valeurs [1403

$$z_1 = \delta_1, \quad z_2 = \delta_2$$

respectivement.

Je montre alors que les fonctions z et $f(z)^2$, considérées comme fonctions de ζ, ont les mêmes points singuliers essentiels, savoir les valeurs γ pour lesquelles

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \gamma$$

pour toute valeur de z. Les deux valeurs de z qui correspondent à un point $\zeta = \alpha$ non essentiellement singulier pour la fonction z de ζ sont ou des points non singuliers de $f(z)$ et $\varphi(z)$ ou des points singuliers $z = a$ de ces fonctions, tels que leurs développements dans le voisinage de $z = a$ ne contiennent point de logarithmes. Il faut de plus que, dans l'expression

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \alpha + \rho_1 (z-a)^{\frac{1}{n}} + \rho_2 (z-a)^{\frac{2}{n}} + \cdots,$$

les coefficients ρ_1 et ρ_2 ne s'annulent pas simultanément, et enfin qu'à toute valeur de z qui ne rend pas infinies les intégrales

$$\int f(z)\,dz,\ \int \varphi(z)\,dz$$

ne correspondent que des valeurs de ζ non essentiellement singulières pour la fonction z de ζ.

Je démontre alors les théorèmes que voici:

Soit $\zeta = \beta$ une valeur finie non essentiellement singulière pour la fonction z de ζ. Si l'une des deux valeurs de z qui correspondent à $\zeta = \beta$ est un point singulier $z = a$ des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, en représentant par

$$\frac{-n-k+1}{n} \quad (k = 0 \text{ ou un entier positif})$$

le plus petit exposant de $z-a$ dans leurs développements, dans le voisinage de $z = a$, l'une des quantités

$$(\zeta-\beta)^{\frac{1}{n}}\sqrt{\psi(\zeta)} \quad \text{ou} \quad (\zeta-\beta)^{\frac{k+1}{n}}\sqrt{\psi(\zeta)}$$

est uniforme dans le voisinage de $\zeta = \beta$ et ne devient ni zéro ni infinie pour $\zeta = \beta$. Cela a lieu également pour $z = \infty$, en désignant l'exposant le plus petit de $\frac{1}{z}$ par

$$\frac{n+1-k}{n}.$$

Si à la valeur $\zeta = \beta$ correspond une valeur non singulière b des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, mais qu'on ait $\psi(\beta) = \infty$, alors

$$(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\psi(\zeta)}$$

reste uniforme dans le voisinage de $\zeta = \beta$. La fonction $\psi(\zeta)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de ζ. Si $\zeta = \infty$ n'est pas un point essentiellement singulier pour la fonction z de ζ, les quantités

$$\zeta^3\sqrt{\psi(\zeta)},\ \zeta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\psi(\zeta)}$$

ne deviennent ni nulles ni infinies pour $z = \infty$ et sont uniformes dans le domaine de $z = \infty$. Au moyen des équations (A.), je démontre alors que z_1+z_2 et $z_1 z_2$ sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 pour toutes les valeurs finies de ces variables.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 278, Zeile 8 v. u. das zweite z statt $z-n$,

„ 280, „ 14, 15 $\zeta = \beta$ statt $z = \beta$.

Sch.

XXXVII.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE.)

(Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. 93, Paris 1881, p. 1063—1065; Séance du 19 Décembre 1881.)

Je vous ai déjà parlé du prix que j'attache à la méthode pour intégrer [1063 les équations différentielles de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

que vous avez donnée dans vos Leçons à l'École Polytechnique. Je crois qu'il serait possible d'en tirer le Tableau de toutes les équations de ce genre qui admettent pour solutions des fonctions uniformes de la variable. Voici un exemple: supposons que l'on cherche toutes les équations

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = F(u) = (u-a_1)^{n_1}(u-a_2)^{n_2}\ldots \tag{1.}$$

qui s'intègrent par des fonctions uniformes et doublement périodiques, problème qu'ont résolu MM. BRIOT et BOUQUET. La difficulté principale qu'il faut [1064 vaincre consiste dans la détermination des dénominateurs des fraction $\frac{n_i}{m}$, supposées réduites à leur plus simple expression. On y parvient comme il suit, en employant votre méthode d'intégration. Je pose

$$\frac{n_i}{m} = \frac{\nu_i}{\mu_i},$$

où ν_i, μ_i n'ont aucun diviseur commun, et semblablement

$$\frac{n_1 + n_2 + \cdots}{m} = \frac{\nu}{\mu},$$

ν et μ étant premiers entre eux. Cela posé, si l'équation (1.) est intégrable

par des fonctions uniformes et doublement périodiques, il faut que le nombre p, désignant la classe de la fonction algébrique η de u, définie par l'équation

(2.) $$\eta^m = F(u)$$

soit égal à l'unité. Nommons ω le nombre des points de ramification simple de cette fonction, et employons une formule connue de RIEMANN (Théorie des fonctions ABÉLiennes, Journal de BORCHARDT, t. 54, no. 7 [1]))

$$\omega - 2m = 2(p-1);$$

vous voyez qu'on en conclut

(3.) $$\omega = 2m.$$

Or, dans le point a_i se confondent $\frac{\mu_i - 1}{\mu_i} m$ points de ramification simple; d'ailleurs les entiers $n_1, n_2, \ldots$ n'ont point tous un même facteur commun avec le nombre m, et comme, dans $z = \infty$, se confondent encore $\frac{\mu - 1}{\mu} m$ points de ramification simple, l'équation (3.) donne:

(4.) $$\zeta - 1 = \sum \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu},$$

en désignant par ζ le nombre des points $a_1, a_2, \ldots$ pour lesquels $\mu > 1$, le signe Σ se rapportant à tous ces points.

De cette équation résulte d'abord

(5.) $$\zeta \geqq 2,$$

1065] et d'autre part, ayant

$$\mu_i \geqq 2, \quad \mu \geqq 1,$$

on conclut de l'équation (4.)

(6.) $$\zeta \leqq 4.$$

On a donc ces trois cas à distinguer:

I. $$\zeta = 2, \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu} = 1;$$

II. $$\zeta = 3, \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu} = 2;$$

III. $$\zeta = 4, \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4} + \frac{1}{\mu} = 3.$$

Les solutions de ces équations fournissent le Tableau qu'ont donné MM. BRIOT et BOUQUET dans le Journal de l'École Polytechnique (XXXVIe Cahier, p. 222).

[1]) Werke (1892), p. 144. Sch.

XXXVIII.

ÜBER FUNCTIONEN, WELCHE DURCH LINEARE SUBSTITUTIONEN UNVERÄNDERT BLEIBEN.

(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1882, Nr. 5, 4. März 1882, Sitzung am 4. März; S. 81—84.)

In einer Note d. d. 30. December 1881, welche Herr F. KLEIN einer [81 in den Mathematischen Annalen unter dem 17. December 1881 gedruckten [82 Arbeit des Herrn H. POINCARÉ in Paris: »sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires« angehängt hat, sagt Herr KLEIN, dass ich über die Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, nirgends etwas veröffentlicht habe.

Dieser Ausspruch ist nicht den Thatsachen entsprechend. Ich begnüge mich zum Nachweis der Unrichtigkeit desselben meine folgenden Arbeiten zu citiren:

1. Meine Arbeit: »sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE. BORCHARDTS Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 83, p. 13, November 1876[1]).

In dieser Arbeit ist für die in dem Titel genannten Differentialgleichungen die durch die Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

---

[1]) Abh. XXIV, S. 85 ff. dieses Bandes. Sch.

definirte Function z von ζ (wo $f(z), \varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen bedeutet) einer eingehenden Behandlung unterworfen worden.

2. In meiner Arbeit: »Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen« in BORCHARDTS Journal für die reine und ange-
83] wandte Mathematik, Band 89, p. 151, 14. Februar 1880[1]), habe ich für die allgemeinen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch die Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

definirte Function z von ζ (wo $f(z), \varphi(z)$ wieder ein Fundamentalsystem von Integralen bedeutet) als Grundlage für meine dortigen Untersuchungen eingeführt (S. daselbst p. 158[2]). (Vergl. auch die Notiz in den »Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 4. Februar 1880[3]), worin die Resultate der vorgenannten Arbeit angegeben sind. — Vergl. auch meinen Brief an BORCHARDT, veröffentlicht in BORCHARDTS Journal, Bd. 90, p. 71[4]).

Wie aus Briefen hervorgeht, mit welchen unmittelbar nach Erscheinen meiner unter 2. bezeichneten Arbeit Herr POINCARÉ mich beehrte, hat dieselbe Herrn POINCARÉ zu seinen ausgezeichneten Untersuchungen über die Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, den directen Anlass gegeben.

Ich unterlasse es in eine Erörterung darüber einzutreten, in wie weit meine beiden vorgenannten Arbeiten auf die Arbeiten des Herrn KLEIN einen Einfluss ausgeübt haben mögen. Ich begnüge mich vielmehr eine Note des Herrn KLEIN anzuführen, welche Bezug nimmt auf

3. meine Arbeit: »Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie« in BORCHARDTS Journal,

---

[1]) Abh. XXXI, S. 191 ff. dieses Bandes. Sch.
[2]) S. 199 dieses Bandes. Sch.
[3]) Abh. XXX, S. 185 ff. dieses Bandes. Sch.
[4]) Abh. XXXIV, S. 225 ff. dieses Bandes. Sch.

Band 81, p. 97, Juli 1875[1]). (Vergl. auch die Angabe der Resultate dieser Arbeit in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Juli 1875[2]).)

Die Note des Herrn KLEIN, welche auf diese Abhandlung Bezug nimmt, [84 steht in seinem ersten Aufsatze über lineare Differentialgleichungen. Dieser befindet sich in den Mathematischen Annalen, Band XI, p. 115 sqq. In derselben (p. 118) bemerkt Herr KLEIN, dass er durch das Studium meiner unter 3. erwähnten Arbeit zu seinen Entwickelungen veranlasst worden sei.

Heidelberg, Februar 1882.

---

[1]) Abh. XX, S. 11 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Abh. XIX, S. 1 ff. dieses Bandes. Sch.

XXXIX.

ÜBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, XXX, S. 703—710; vorgelegt am 8. Juni; ausgegeben am 29. Juni.)

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen [703 Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung ersten Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen höheren Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die m^{te}, so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m-2$ sei. Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden sind die hauptsächlichsten Resultate einer Arbeit angegeben, welche ich ausführlicher zu veröffentlichen gedenke, und welche ausser einer Reihe von Sätzen über Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung die Lösung des eben in Anregung gebrachten Problems für den Fall der Differentialgleichungen dritter Ordnung enthält.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraisch integrirbar sind, zu der Klasse von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

1.

Es sei

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in z rationalen
704] Coefficienten, gehörig zu der Klasse von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (BORCHARDTS Journal für Mathematik Bd. 66, S. 146[1]) Gl. (12.)) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln sämmtlicher determinirender Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A.) y_1, y_2, y_3 eine irreductibele Gleichung

$$\text{(B.)} \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von y_1, y_2, y_3 bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die HESSEsche Covariante von f, so ist

$$\text{(1.)} \qquad H(f) = X(z)$$

Wurzel einer rationalen Function von z, welche nicht identisch verschwindet.

Substituirt man in (A.)

$$\text{(2.)} \qquad y = X(z)^{\frac{1}{2n-6}} v,$$

so geht dieselbe über in

$$\text{(A'.)} \qquad \frac{d^3v}{dz^3} + p'\frac{d^2v}{dz^2} + q'\frac{dv}{dz} + r'v = 0.$$

Ist v_1, v_2, v_3 das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A'.), so ist

$$\text{(B'.)} \qquad f(v_1, v_2, v_3) = 0.$$

Ist z ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale von (A.) für $z = z_1$ je einen gleichen Werth an, wie für $z = z$, so erhalten v_1, v_2, v_3 auf denselben Wegen in z_1 Werthe, welche aus denen für z durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel hervorgehen.

---

[1]) Abh. VI, Band I, S. 186 dieser Ausgabe. Sch.

Ist n grösser als Zwei, so ist z_1 eine algebraische Function von z, und es sind sämmtliche Integrale der Gleichung (A.) algebraisch.

2.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 das resp. y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung:

$$\text{(A''.)} \qquad \frac{d^3u}{dz^3} - \frac{d^2(pu)}{dz^2} + \frac{d(qu)}{dz} - ru = 0^*),$$

so finden wir

$$\text{(C.)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} = Mu_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo M Wurzel einer rationalen Function von z.

Ist insbesondere n gleich Zwei, so ergiebt sich zwischen p, q, r in [705 der Gleichung (A.) die Relation:

$$\text{(1.)} \qquad 2r = -\tfrac{1}{2}p^{(2)} - \tfrac{3}{2}pp^{(1)} - \tfrac{4}{27}p^3 + \tfrac{3}{2}pq + q^{(1)},$$

wo $p^{(i)} = \frac{d^ip}{dz^i}$, $q^{(i)} = \frac{d^iq}{dz^i}$ gesetzt ist, und man hat

$$\text{(2.)} \qquad M = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dz}.$$

Findet umgekehrt die Relation (1.) statt, so besteht zwischen y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B.) vom zweiten Grade.

Bestimmt man zwei Functionen p_1, p_0 aus den Gleichungen:

$$\text{(3.)} \qquad 3p_1 = p, \quad 2p_1^2 + p_1^{(1)} + 4p_0 = q, \quad p_1^{(1)} = \frac{dp_1}{dz},$$

so ergiebt Gleichung (1.)

$$\text{(4.)} \qquad r = 4p_0p_1 + 2p_0^{(1)}, \quad p_0^{(1)} = \frac{dp_0}{dz},$$

d. h. ist n gleich zwei, so ist die Gleichung (A.) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gleichung:

$$\text{(5.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} + p_0y = 0$$

genügt.

*) Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTS Journ. für Mathem. Bd. 76, S. 183[1]), und eine Arbeit des Hrn. FROBENIUS in demselben Journal, Bd. 77, S. 245.

1) Abh. XVI, Band I, S. 421 dieser Ausgabe. Sch.

3.

Es seien sämmtliche Integrale der Gleichung:

$$\frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)y = 0 \tag{1.}$$

mit rationalen Coefficienten, algebraisch. Gehören zu einem beliebigen Werthe z genau die Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale von (1.) in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ je einen gleichen Werth erhält wie in z, so kann man eine rationale Function $\varphi(z)$ von z angeben, von der Art, dass auf denselben Wegen $y\varphi(z)^{-\frac{1}{\mu}}$ in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ Werthe erhält, die sich nur durch Einheitswurzeln als Factoren von dem Werthe von $y\varphi(z)^{-\frac{1}{\mu}}$ in z unterscheiden, wo y ein willkürliches Integral der Gleichung (1.) und μ eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man

$$y = \varphi(z)^{\frac{1}{\mu}} w, \tag{2.}$$

so genügt w der Gleichung

$$\frac{d^m w}{dz^m} + g_1(z)\frac{d^{m-1}w}{dz^{m-1}} + \cdots + g_m(z)w = 0 \tag{3.}$$

706] mit rationalen Coefficienten. Ein willkürliches Integral dieser Gleichung erhält auf geeigneten Wegen in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ Werthe, welche sich von dem Werthe desselben in z durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.

Es sei

$$t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)\ldots(\alpha - z_{\sigma-1}), \tag{4.}$$

wo α eine willkürliche Grösse, so ist t eine rationale Function von z.

Die Gleichung (3.) lässt sich in eine Gleichung:

$$\frac{d^m w}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}w}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)w = 0 \tag{5.}$$

mit der unabhängigen Variabeln t transformiren, deren Coefficienten rationale Functionen von t werden.

Die Gleichung (5.) besitzt die beiden Eigenschaften, dass erstlich zu einem beliebigen Werthe t kein anderer t_1 gehört, für welchen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (5.) je einen gleichen Werth annimmt, wie in t; und dass zweitens die Anzahl der Werthe, welche ein willkürliches Inte-

gral derselben Gleichung durch alle Umläufe von t annimmt, und wovon nicht der Quotient zweier constant, übereinstimmt mit der Anzahl der Werthe, welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1.) durch alle Umläufe von z annimmt, und wovon nicht der Quotient zweier constant.

Ist ν die Anzahl derjenigen allen Umläufen der unabhängigen Variabeln z entsprechenden Werthe eines willkürlichen Integrals einer linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, mit rationalen Coefficienten, von welchen Werthen nicht der Quotient zweier constant, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von z, welche zu einem Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale derselben Differentialgleichung gehören, nicht kleiner als $\frac{m-1}{2}\nu$.

4.

Die Gleichung (B.) können wir als eine algebraische Gleichung zwischen

$$\eta = \frac{y_2}{y_1}, \quad \zeta = \frac{y_3}{y_1} \tag{1.}$$

betrachten.

Wir bezeichnen nach RIEMANN mit p die Klasse dieser algebraischen Gleichung, d. h. die Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien $J_1, J_2, \ldots, J_p$ solche linearunabhängige Integrale erster Gattung, [707 in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn ARONHOLD*) von CLEBSCH und Herrn GORDAN**) für die ABELschen Functionen eingeführt worden ist, so dass also

$$dJ_k = \frac{\varphi_i(y_1, y_2, y_3)}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} \sum \pm c_1 y_2 dy_3, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.}$$

wo $\varphi_i = 0$ eine Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämmtlichen Doppel- und Rückkehrpunkte der Curve (B.) hindurchgeht.

Wir finden zunächst

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^3\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X(z)}}dz = \frac{\Delta}{M}dz, \tag{3.}$$

*) Monatsberichte der Akademie, April 1861.

**) Theorie der ABELschen Functionen, S. 2.

wo $X(z)$, M, Δ Wurzeln rationaler Functionen von z sind, und zwar $X(z)$ dieselbe Bedeutung hat wie in Gleichung (1.) No. 1, M dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (C.), und endlich

$$\Delta = e^{-\int p\,dz}. \tag{4.}$$

Wir zeigen alsdann, dass $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ als Functionen von z ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung

$$\frac{d^p w}{dz^p} + Q_1 \frac{d^{p-1} w}{dz^{p-1}} + \cdots + Q_p w = 0 \tag{D.}$$

mit in z rationalen Coefficienten bilden.

Giebt es einen Umlauf U von z, welcher y_1, y_2, y_3 resp. in y_1', y_2', y_3' überführt und zugleich den Quotienten λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) ungeändert lässt, ohne dass $\frac{y_2'}{y_1'} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3'}{y_1'} = \frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.

Ist ν die Anzahl der allen Umläufen von z entsprechenden Werthe eines willkürlichen Integrals der Gleichung (A.), wovon nicht der Quotient zweier constant, so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder ν die Anzahl der allen Umläufen von z entsprechenden Werthe eines willkürlichen Integrals der Gleichung (D.), wovon nicht der Quotient zweier constant, je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

Die Anzahl der Stellen (η, ζ) der RIEMANNschen Fläche, welche einem gegebenen Werthe des Quotienten

$$\frac{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p}{c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + \cdots + c_p'\varphi_p},$$

708] wo $c_1, c_2, \ldots, c_p, c_1', c_2', \ldots, c_p'$ willkürliche Constanten, entsprechen, ist bekanntlich $2p-2$*).

Ist daher die Gleichung (A.) so beschaffen, dass nicht jeder Quotient zweier Integrale derselben für einen beliebigen Werth von z und noch für einen anderen Werth z_1 je einen gleichen Werth annehmen kann, so ist die Anzahl der Werthe z, welche einem gegebenen Werthe des Quotienten λ zweier

*) RIEMANN, ABELsche Functionen[1]).

[1]) Werke (1892), S. 117. Sch.

willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) entsprechen, $p-1$ oder $2p-2$, je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt. In dem einen oder dem anderen Falle folgt aus No. 3

$$\text{(E.)} \qquad \begin{cases} p-1 \geqq \frac{p-1}{2}\frac{1}{2}\nu & \text{oder} \\ 2p-2 \geqq \frac{p-1}{2}\nu \end{cases}$$

also für $p > 1$

$$\text{(F.)} \qquad \nu \leqq 4.$$

Nach No. 3 ergiebt sich, dass (F.) auch bestehen bleibt, wenn für einen beliebigen Werth z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Das durch (F.) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Ist die Klasse p der Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln*) derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, nicht grösser als Vier.

5.

Ist p gleich Eins, so gehört zur Gleichung (B.) nur ein Integral erster Gattung J.

Wir zeigen, dass

$$\text{(1.)} \qquad dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3)\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = \psi(z, \eta)\,dz = R\,dz,$$

wo $\psi(z, \eta)$ eine rationale Function von z und η und R Wurzel einer rationalen Function von z.

Aus den Untersuchungen der Herren Briot und Bouquet**) ergiebt sich, dass R^4 oder R^6 eine rationale Function von z sein müsse.

*) Über die Bedeutung dieser Bezeichnung siehe meine Arbeit in Borchardts Journal für Mathem. Bd. 81, S. 111[1]), No. 9.

**) Journal de l'École Polytechnique, t. 21, p. 222.

1) Abh. XX, S. 27 dieses Bandes. Sch.

Ist die Gleichung (A.) so beschaffen, dass nicht für ein beliebiges z und 709] noch für einen anderen Werth z_1 jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, so ergiebt sich, dass η und demnach auch eine gewisse Potenz eines willkürlichen Integrals y der Gleichung (A.) eine rationale Function von z und R ist.

Es ist daher die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Nach No. 3 bleibt dieser Satz auch bestehen, wenn für ein beliebiges z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A.) je einen gleichen Werth annehmen kann.

Ist endlich p gleich Null, so ist bekanntlich

$$\eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)}, \quad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)}, \tag{2.}$$

wo $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades einer Variabeln s darstellen.

Wir beweisen, dass s als Function von z der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z rationalen Coefficienten ist.

Es sei

$$\xi_1^n f_i(s) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.}$$

so findet sich

$$y_i = \varrho \varphi_i(\xi_1, \xi_2), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.}$$

wo ϱ Wurzel einer rationalen Function von z ist.

Das allgemeine Integral der Gleichung (A.) ist also im Falle $p = 0$ abgesehen von der Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten*) darstellbar.

*) Über solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vergl. meine Arbeiten in BORCHARDTS Journal Bd. 81, S. 97 und Bd. 85, S. 1[1]).

[1]) Abh. XX, S. 11 und XXV, S. 115 dieses Bandes. Sch.

Für $n = 2$ ergeben sich ebenfalls die Gleichungen (2.) und die daraus hervorgehenden (4.). Die Functionen $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$ sind in diesem Falle vom zweiten Grade und ϱ ist eine Constante, während die Differentialgleichung zweiter Ordnung in diesem Falle nicht algebraisch integrirbar zu sein braucht, in Übereinstimmung mit dem in No. 2 gegebenen Resultate.

6.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A.), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B.) stattfindet, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Resultate:

I. Ist der Grad n der Gleichung (B.) gleich Zwei, so ist die Glei- [710
chung (A.) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist n grösser als Zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A.) algebraische Functionen von z.

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Klasse p der algebraischen Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, nicht grösser als Vier.

b) Ist p gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln Zwei, Drei, Vier oder Sechs.

c) Ist p gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A.), abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze homogene Functionen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraisch integrirbare Gleichung (A.) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B.) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt.

Die Vergleichung der auf die Anzahl der reducirten Wurzeln bezüglichen Sätze, für den Fall, dass die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist, mit den Resultaten des Herrn C. JORDAN*) behalte ich mir für die ausführlichere Abhandlung über den gegenwärtigen Gegenstand vor.

*) BORCHARDTs Journal für Mathem., Bd. 84, S. 89.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 293, Gl. (3.) wurde $\sqrt[s]{\frac{\Delta}{X(z)}}$ statt $\sqrt[s]{\frac{X(z)}{\Delta}}$ gesetzt,

„ 295, Zeile 6 wurden die Worte »für $p > 1$« eingeschaltet.

2) Die Eingangs (S. 289) erwähnte Arbeit ist die folgende Abh. XL. SCH.

XL.

ÜBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN.

(Acta Mathematica, Band 1, 1882, S. 321—362.)

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen [321
Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung ersten Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen höheren Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die m^{te}, so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m-2$ sei. — Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden habe ich die Lösung dieses Problems für die Differentialgleichungen dritter Ordnung durchgeführt. Für diese kann es nur eine Relation der genannten Art geben. Bemerkenswerth sind die Anwendungen, welche wir bei unserer Untersuchung von der Theorie der ABELschen Integrale haben machen können.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraisch integrirbar sind, zu der Klasse von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

Wir haben in der folgenden Arbeit auch eine Reihe von Sätzen über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen aufgestellt, von welchen [322

wir in derselben Arbeit Gebrauch machen, die aber auch anderweitige Anwendungen zulassen.

Die Resultate dieser Arbeit habe ich in der auch gegenwärtig festgehaltenen Reihenfolge bereits in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 8. Juni 1882[1]), veröffentlicht.

1.

Es sei

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, gehörig zu der Klasse von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (BORCHARDTS Journal für Mathem. Bd. 66, S. 146[2]), Gl. (12.)) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A.) y_1, y_2, y_3 eine irreductible Gleichung

$$\text{(B.)} \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von y_1, y_2, y_3 bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die HESSESche Covariante von f, so ist $H(f)$ nicht identisch Null, da der Voraussetzung nach f nicht in lineare Factoren zerlegbar ist*).

Ein beliebiger Umlauf von z führe $y_\varkappa$ über in

$$\text{(1.)} \qquad y'_\varkappa = a_{\varkappa 1}y_1 + a_{\varkappa 2}y_2 + a_{\varkappa 3}y_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

so geht f, folglich auch $H(f)$ durch denselben Umlauf in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt über. Demnach ist $\frac{d \log H(f)}{dz}$ eine eindeutige
323] Function von z. Da ausserdem der vorausgesetzten Natur der Integrale der Gleichung (A.) wegen diese Function für jeden im Endlichen gelegenen

*) Vergl. GORDAN und NÖTHER, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 13. Dec. 1875, 10. Jan. 1876.

1) Abh. XXXIX, S. 289 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

Punkt p in der z-Ebene mit einer bestimmten Potenz von $z-p$, und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist dieselbe eine rationale Function. Da $H(f)$ ebenfalls für jeden im Endlichen befindlichen Punkt p mit einer bestimmten Potenz von $z-p$ und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist demnach

$$H(f) = X(z) \tag{2.}$$

Wurzel einer rationalen Function von z.

Setzen wir

$$\frac{y_2}{y_1} = \eta, \qquad \frac{y_3}{y_1} = \zeta, \tag{3.}$$
$$H(f) = y_1^{3n-6} H_1(\eta, \zeta),$$

so verwandelt sich die Gl. (2.) in

$$\left[y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}\right]^{3n-6} H_1(\eta, \zeta) = 1. \tag{4.}$$

Ist z ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A.) für $z=z_1$ je einen gleichen Werth an wie für $z=z$, so folgt aus der Gleichung (4.), dass auf denselben Wegen $y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ in z_1 einen Werth annimmt, welcher aus dem für z durch Multiplication mit einer Einheitswurzel λ hervorgeht. Da jeder Quotient zweier Integrale für $z=z_1$ denselben Werth wie für z annimmt, so folgt, dass auch $y_2 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$, $y_3 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ für $z=z_1$ Werthe annehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit λ hervorgehen.

Substituirt man daher in (A.)

$$y = X(z)^{\frac{1}{3n-6}} v,$$

wodurch dieselbe in

$$\frac{d^3v}{dz^3} + p'\frac{d^2v}{dz^2} + q'\frac{dv}{dz} + r'v = 0 \tag{A'.}$$

übergehen möge, so hat das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem [324 von Integralen v_1, v_2, v_3 der Gleichung (A'.) die Eigenschaft, für $z=z_1$ Werthe anzunehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel λ hervorgehen.

Zwischen v_1, v_2, v_3 findet die Gleichung

(B'.) $$f(v_1, v_2, v_3) = 0$$

statt.

Sei

$$v_1 = \varphi_1(z), \quad v_2 = \varphi_2(z), \quad v_3 = \varphi_3(z),$$

so ist der Voraussetzung gemäss, wenn man von z auf geeigneten Wegen nach z_1 geht,

(5.) $$\varphi_\varkappa(z_1) = \lambda \varphi_\varkappa(z), \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

wo λ eine Einheitswurzel bedeutet.

Die Functionen $\varphi_\varkappa(z_1)$ genügen der Gleichung

(6.) $$\frac{d^3v}{dz_1^3} + p'(z_1)\frac{d^2v}{dz_1^2} + q'(z_1)\frac{dv}{dz_1} + r'(z_1)v = 0.$$

Es sei

$$z = \psi(z_1), \quad \frac{d^i z}{dz_1^i} = \psi^{(i)}(z_1).$$

Transformirt man Gl. (6.) in die unabhängige Variable z, so folgt

(6a.) $$\frac{d^3v}{dz^3}\psi'^3 + [3\psi'\psi'' + p'(z_1)\psi'^2]\frac{d^2v}{dz^2} + [\psi''' + p'(z_1)\psi'' + q'(z_1)\psi']\frac{dv}{dz} + r'(z_1)v = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch ψ'^3, so muss dieselbe wegen Gleichung (5.) mit Gleichung (A'.) übereinstimmen. Man erhält also

(7.) $$\begin{cases} \dfrac{3\psi''}{\psi'^2} + \dfrac{p'(z_1)}{\psi'} = p'(z), \\ \dfrac{\psi'''}{\psi'^3} + p'(z_1)\dfrac{\psi''}{\psi'^3} + \dfrac{q'(z_1)}{\psi'^2} = q'(z), \\ \dfrac{r'(z_1)}{\psi'^3} = r'(z). \end{cases}$$

325] Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

(8.) $$\psi'^3 = C\frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)},$$

wo

(9.) $$\Delta'(z) = e^{-\int p'(z)\,dz}$$

gesetzt ist und C eine Constante bedeutet. Diese Constante ist von Null verschieden, da ψ' nicht identisch verschwinden darf.

Aus der letzten der Gleichungen (7.) und aus Gleichung (8.) erhält man

$$r'(z_1) = C\frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)}r'(z). \tag{10.}$$

Aus den Gleichungen (7.) ergiebt sich ferner

$$\left[q'(z)-\frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz}-\frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3\frac{C^2}{\Delta'(z)^2} = \left[q'(z_1)-\frac{1}{3}\frac{dp'(z_1)}{dz_1}-\frac{2}{9}p'(z_1)^2\right]^3\frac{1}{\Delta'(z_1)^2}. \tag{11.}$$

Da der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A.) gemäss Δ' Wurzel einer rationalen Function ist, so findet demnach nach Gleichung (10.) oder (11.) zwischen z und z_1 eine algebraische Gleichung statt, wenn nicht

$$\left[q'(z)-\frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz}-\frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 = C'\Delta'(z)^2 \tag{12.}$$

und zugleich

$$r'(z) = C''\Delta'(z), \tag{13.}$$

wo C' und C'' Constanten bedeuten.

Nach Gl. (9.) ist

$$p'(z) = -\frac{d\log\Delta'(z)}{dz}, \tag{14.}$$

und aus Gl. (12.) ergiebt sich

$$q'(z) = -\frac{1}{3}\frac{d^2\log\Delta'}{dz^2}+\frac{2}{9}\left(\frac{d\log\Delta'}{dz}\right)^2+\gamma\Delta'^{\frac{2}{3}}, \tag{15.}$$

wo γ eine Constante bedeutet.

Setzt man [326

$$\frac{d\log v}{dz} = \omega, \tag{16.}$$

so folgt aus Gleichung (A'.)

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+3\frac{d\omega}{dz}\omega+\omega^3+p'(z)\left[\frac{d\omega}{dz}+\omega^2\right]+q'(z)\omega+r'(z) = 0. \tag{17.}$$

Die Gleichung (17.) wird aber, unter der Voraussetzung dass $p'(z), q'(z), r'(z)$ die durch die Gleichungen (14.), (15.), (13.) gegebenen Werthe haben, be-

friedigt durch

$$\omega = \mu \Delta'(z)^{\frac{1}{3}}, \tag{18.}$$

wo μ eine Wurzel der Gleichung

$$\mu^3 + \gamma\mu + C'' = 0. \tag{19.}$$

Ist $C'' = 0$, so ist nach Gl. (13.) $r'(z) = 0$.

In diesem Falle wird die Gleichung (A'.) befriedigt durch

$$v_1 = \int \Delta'^{\frac{1}{3}}(s)\, ds.$$

Ein zweites Integral v_2 ergiebt sich

$$v_2 = v_1^2 + \text{const.}$$

Da ein drittes Integral $v_3 = 1$ genügt, so findet also in diesem Falle zwischen v_1, v_2, v_3 die Gleichung zweiten Grades

$$v_2 v_3 = v_1^2 + \text{const.}\, v_3^2$$

statt.

Es kann $\Delta'(z)$ nicht constant sein, da sonst nach den Gleichungen (13.), (14.), (15.) $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ constant wären, die Gleichung (A'.) also durch eine Function der Form e^{xz} befriedigt würde, wo x constant; dieses widerspricht aber der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A.). Es muss demnach Δ' für einen singulären Punkt a der Gleichung (A'.) oder für $z = \infty$ unendlich werden. Es wird aber die logarithmische Ableitung eines Integrals v der Gl. (A'.) nicht unendlich für $z = \infty$.

327] Wenn demnach C'' von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung (18.), dass $\Delta'(z)$ nur für die singulären Punkte a der Gl. (A'.) unendlich werden kann. Nun aber ist $\omega(z-a) = (z-a)\frac{d \log v}{dz}$ für $z = a$ gleich einer rationalen Zahl.

Es sei daher in der Umgebung von $z = a$

$$\Delta'(z)^{\frac{1}{3}} = a_0(z-a)^{-1} + \cdots;$$

alsdann muss nach Gleichung (18.) μa_0 eine rationale Zahl sein. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass γ nicht verschwinden darf, da sonst gleichzeitig μa_0, $\mu\varepsilon a_0$, $\mu\varepsilon^2 a_0$ rationale Zahlen sein müssten, wenn μ eine der Wurzeln der Gleichung $\mu^3 + C'' = 0$, ε eine primitive dritte Wurzel der Einheit bezeichnet; was nicht möglich ist.

Es ergiebt sich daher aus den Gln. (12.), (13.)

$$r'(z) = g(z)^2, \tag{20.}$$

wo $g(z)$ eine rationale Function von z bedeutet.

Der vorausgesetzten Natur der Gl. (A.) zu Folge ist in der Umgebung eines singulären Punktes a der Gleichung (A'.)

$$r'(z) = \frac{\zeta_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{\zeta_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{\zeta_{-1}}{(z-a)} + \zeta_0 + \zeta_1(z-a) + \cdots,$$

folglich ist, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ die Gesammtheit der singulären Punkte der Gleichung (A'.) bedeuten,

$$r'(z)(z-a_1)^2(z-a_2)^2 \ldots (z-a_\varkappa)^2 = h(z)^2,$$

wo $h(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet.

Aus demselben Grunde muss in der Umgebung von $z = \infty$

$$r'(z) = \frac{\eta_{12}}{z^2} + \frac{\eta_{14}}{z^4} + \cdots$$

sein.

Also ist $r'(z)z^2$ für $z = \infty$ nicht unendlich, und demnach $h(z)$ höchstens vom Grade $\varkappa - 1$, also

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-a_1)\ldots(z-a_\varkappa)} = \frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa}. \tag{21.}$$

Aus den Gleichungen (13.), (20.), (21.), (18.) folgt demnach [328

$$\omega = \frac{\mu}{C''^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa}\right].$$

Aus dem oben Bemerkten ergiebt sich, dass $\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{2}}}\varepsilon_i$ rationale Zahlen sind, und demnach

$$v = [(z-a_1)^{\varepsilon_1}(z-a_2)^{\varepsilon_2}\ldots(z-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}]^{\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{2}}}} \tag{22.}$$

eine Wurzel einer rationalen Function darstellt.

Von den Wurzeln der Gleichung (19.) sind wenigstens zwei μ_1, μ_2 von einander verschieden. Setzt man in (22.) $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$, so erhält man zwei Integrale von (A'.) v_1, v_2, deren Quotient nicht constant. Substituirt man v_1, v_2 in Gl. (B'.), so folgt, dass auch v_2 eine algebraische Function von z wird.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen folgt, dass die Gleichungen (12.) und (13.) nur stattfinden dürfen, wenn entweder $n = 2$ oder die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist.

Wir fanden oben, dass, wenn die Gleichungen (12.) und (13.) nicht bestehen, zwischen z und z_1 eine algebraische Gleichung stattfindet. Ist daher η gegeben, so folgen aus Gl. (B.) für ζ n Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Den n Werthepaaren $(\eta, \zeta_1), (\eta, \zeta_2), \ldots, (\eta, \zeta_n)$ entspricht demnach nur eine endliche Anzahl von Werthen z, d. h.:

Einem gegebenen Werthe von η entspricht nur eine endliche Anzahl von Werthen z. Es findet also eine Gleichung der Form

$$z^l + A_1 z^{l-1} + \cdots + A_l = 0 \tag{23.}$$

statt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_l$ eindeutige Functionen von η sind.

Setzt man in Gl. (A.)

$$y = y_1 \int \omega dz,$$

so erhält man

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{3d\log y_1}{dz} + p\right)\frac{d\omega}{dz} + \left[\frac{3}{y_1}\frac{d^2y_1}{dz^2} + 2p\frac{d\log y_1}{dz} + q\right]\omega = 0.$$

329] Von dieser Gleichung bilden $\frac{d\eta}{dz}, \frac{d\zeta}{dz}$ ein Fundamentalsystem von Integralen. Es ist also*)

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = \frac{\Delta}{y_1^2},$$

wo

$$\Delta = \sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz}\frac{d^2y_3}{dz^2} = e^{-\int p dz}$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\Delta}{y_1^2}. \tag{24.}$$

Durch die Substitution (3.) gehe (B.) in

$$F(\eta, \zeta) = 0 \tag{B''.}$$

über. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}$ als rationale Function von η

*) S. meine Abh. Bd. 66 des BORCH. Journ. p. 130[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 169. Sch.

und ζ

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta_1^2} = G(\eta_1, \zeta). \tag{25.}$$

Aus Gleichung (4.) folgt

$$y_1 = \sqrt[2n-6]{\frac{X(z)}{H_1(\eta_1, \zeta)}}. \tag{26.}$$

Also ergiebt Gl. (24.)

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\sqrt[2n-6]{X(z)}} \frac{\sqrt[2n-6]{H_1(\eta, \zeta)}}{\sqrt[3]{G(\eta, \zeta)}}$$

oder

$$\sqrt[2n-6]{\frac{\Delta^{n-2}}{X(z)}}dz = \sqrt[2n-6]{\frac{G(\eta, \zeta)^{n-2}}{H_1(\eta, \zeta)}}d\eta. \tag{27.}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass, wenn η in einen willkürlichen Werth β einrückt, und b einen zugehörigen Werth von z bedeutet, in der Umgebung dieser Werthe zwischen z und η eine Gleichung besteht der Form

$$\sum_\alpha c_\alpha (z-b)^{\frac{\alpha}{\alpha}} = \sum_\alpha e_\alpha (\eta-\beta)^{\frac{\alpha}{\delta}}, \tag{28.}$$ [330

wo α, δ positive ganze Zahlen bedeuten, und wo die unendlichen Reihen auf beiden Seiten nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber bekanntlich $z-b$ dargestellt durch eine nach Potenzen von $(\eta-\beta)^{\frac{1}{\gamma}}$ fortschreitende Reihe, mit nur einer endlichen Anzahl negativer Potenzen dieser Grösse, wo γ eine positive ganze Zahl bedeutet. Daher kann z als Function von η nicht wesentlich singuläre Punkte besitzen. Derselbe Schluss gilt auch, wenn $\eta = \infty$ oder $z = \infty$ wird. In der Gleichung (23.) sind demnach die Coefficienten rationale Functionen von η.

Es ist also η, folglich auch ζ eine algebraische Function von z, und die Gleichung (26.) ergiebt, dass y_1 die gleiche Eigenschaft besitzt.

Die vorhergehenden Schlüsse sind nur in dem Falle nicht zulässig, dass $n = 2$, weil alsdann $H(f)$ constant, und daher die Gleichung (4.) nicht existirt.

Man erhält also den Satz:

Findet zwischen den Integralen der Gleichung (A.) eine Gleichung (B.) höheren als zweiten Grades statt, so ist die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar.

2.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung

$$\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{d^2(pu)}{dz^2} + \frac{d(qu)}{dz} - ru = 0$$

derart, dass

$$u_1 = \left(y_2\frac{dy_3}{dz} - y_3\frac{dy_2}{dz}\right)\frac{1}{\Delta},$$
$$u_2 = \left(y_3\frac{dy_1}{dz} - y_1\frac{dy_3}{dz}\right)\frac{1}{\Delta},$$
$$u_3 = \left(y_1\frac{dy_2}{dz} - y_2\frac{dy_1}{dz}\right)\frac{1}{\Delta},$$ *)

331] so folgt aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}y_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}y_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}y_3 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\dfrac{dy_3}{dz} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{d^2y_1}{dz^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{d^2y_2}{dz^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\dfrac{d^2y_3}{dz^2} = M, \end{cases}$$

wo

$$M = -\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\left(\frac{dy_2}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}\left(\frac{dy_3}{dz}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2\partial y_3}\frac{dy_2}{dz}\frac{dy_3}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_3\partial y_1}\frac{dy_3}{dz}\frac{dy_1}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_2}\frac{dy_1}{dz}\frac{dy_2}{dz}\right\},$$

$$(C.)\qquad \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = Mu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Es sei allgemein $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function der Variablen y_1, y_2, y_3, welche durch die Substitution

$$(2.)\qquad a_{\varkappa 1}y_1 + a_{\varkappa 2}y_2 + a_{\varkappa 3}y_3 \text{ für } y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

in $j\Phi$ übergeführt wird, wo j eine von y_1, y_2, y_3 unabhängige Grösse, und

*) Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTs Journ. Bd. 76, S. 183 [1]), und eine Arbeit des Herrn FROBENIUS in demselben Journ. Bd. 77, S. 245.

1) Abh. XVI, Band I dieser Ausgabe, S. 421. Sch.

bezeichnet man mit Φ', $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_\varkappa}\right)'$ das, was aus Φ resp. $\frac{\partial\Phi}{\partial y_\varkappa}$ nach Ausübung der Substitution (2.) wird, so folgt aus der Gleichung

$$\Phi' = j\Phi, \tag{3.}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_\varkappa}\right)' = j\left[\beta_{\varkappa 1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + \beta_{\varkappa 2}\frac{\partial\Phi}{\partial y_2} + \beta_{\varkappa 3}\frac{\partial\Phi}{\partial y_3}\right], \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{4.}$$

wo $\beta_{\varkappa\lambda}$ die Elemente der zu (2.) inversen Substitution bedeuten.

Irgend einem Umlaufe von z möge nun die auf y_1, y_2, y_3, wenn diese Grössen wieder die Integrale der Gleichung (A.) bedeuten, ausgeübte Substitution (2.) entsprechen; dann ist:

$$f(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \cdots) = f' = jf(y_1, y_2, y_3), \tag{5.}$$

wo j eine Constante. Dieses ergiebt sich daraus, dass die Function f' mit der Function f wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (B.) [332 einen gemeinschaftlichen von f verschiedenen Factor nicht besitzen kann, während y_1, y_2, y_3 der Gleichung $f' = 0$ genügen müssen. Wenn demnach diese Functionen nicht bis auf einen constanten Factor identisch wären, so würden die beiden Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$ constante Werthe der Verhältnisse $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ liefern, was nicht möglich ist.

Da die Gleichung (5.) also erfüllt ist, so kann man in Gl. (4.) $\Phi = f$ setzen. Andererseits geht durch denselben Umlauf von z $u_\varkappa$ in

$$\beta_{\varkappa 1}u_1 + \beta_{\varkappa 2}u_2 + \beta_{\varkappa 3}u_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

über. Demnach führt die Gleichung (4.) für $\Phi = f$ zu dem Schlusse, dass M durch den genannten Umlauf von z in jM übergeht. Hieraus ergiebt sich wie für $H(f)$ in vor. No.:

dass M Wurzel einer rationalen Function von z ist.

Ist insbesondere $n = 2$, so ist $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ als lineare homogene Function von y_1, y_2, y_3 Integral der Gleichung (A.). Es muss demnach, wenn man in (A.) die Substitution

$$y = Mu \tag{6.}$$

ausführt, die resultirende Differentialgleichung mit der adjungirten zur Gleichung (A.) übereinstimmen. Dieses drückt sich durch die Gleichungen

$$\frac{3M'+pM}{M} = -p,$$

$$\frac{3M''+2pM'+qM}{M} = -2p'+q,$$

$$\frac{M'''+pM''+qM'+rM}{M} = -p''+q'-r$$

aus, wo die oberen Accente Ableitungen andeuten.

Von diesen liefert die erste

$$M = e^{-\frac{1}{3}\int p\,dz}. \tag{7.}$$

Die zweite wird durch die Gleichung (7.) von selbst erfüllt, während die dritte unter Anwendung der Gleichung (7.) übergeht in:

$$2r = -\tfrac{1}{3}p''-\tfrac{2}{3}pp'-\tfrac{4}{27}p^3+\tfrac{2}{3}pq+q'. \tag{8.}$$

333] Findet umgekehrt diese Gleichung statt, und wählt man M der Gleichung (7.) gemäss, so ist die durch die Substitution (6.) aus (A.) entstehende Gleichung mit ihrer adjungirten identisch, und es folgt aus der Gleichung

$$y_\varkappa = Mu_\varkappa,$$

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 0. \tag{9.}$$

Demnach ist die Gleichung (8.) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen y_1, y_2, y_3 eine homogene Gleichung zweiten Grades besteht.

Bestimmt man zwei Functionen p_1, p_0 aus den Gleichungen

$$3p_1 = p, \quad 2p_1^2+p_1'+4p_0 = q, \tag{10.}$$

wo

$$p_1' = \frac{dp_1}{dz},$$

so folgt aus Gleichung (8.)

$$r = 4p_0p_1+2p_0', \tag{11.}$$

wo

$$p_0' = \frac{dp_0}{dz}.$$

Die Gleichung (A.) ist also in diesem Falle übereinstimmend mit

$$\frac{d^3y}{dz^3}+3p_1\frac{d^2y}{dz^2}+(2p_1^2+p_1'+4p_0)\frac{dy}{dz}+(4p_0p_1+2p_0')y = 0. \tag{12.}$$

Bestimmt man aber die Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gl.:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} + p_0 y = 0 \tag{13.}$$

genügt, so ergiebt sich ebenfalls die Gl. (12.).

Ist demnach $n = 2$, so ist die Gleichung (A.) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (13.) genügt*).

3. [334

Es seien die sämmtlichen Integrale der Gleichung

$$\frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)y = 0 \tag{1.}$$

mit rationalen Coefficienten, algebraisch. Ferner werde vorausgesetzt, dass für einen willkürlichen Werth von z jeder Quotient zweier Integrale von (1.) auf geeigneten Wegen in z_1 denselben Werth annehme wie in z. Alsdann muss das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ auf denselben Wegen in $vy_1, vy_2, \ldots, vy_m$ übergehen, wo v eine bestimmte Function von z.

Es möge

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürliche Constanten, der irreductiblen Gleichung

$$y^r + \varphi_1(z)y^{r-1} + \cdots + \varphi_r(z) = 0 \tag{2.}$$

genügen, wo $\varphi_\varkappa(z)$ rationale Functionen von z. Dann ist der Voraussetzung gemäss

$$v^r y^r + \varphi_1(z_1)v^{r-1}y^{r-1} + \cdots + \varphi_r(z_1) = 0$$

*) Nach dem Erscheinen meines obengenannten Aufsatzes in den Sitzungsber. der Akad. 8. Juni 1882[1]) machte mich Herr Brioschi durch ein Schreiben vom 22. Juli desselben Jahres auf eine in dem Bulletin de la société mathématique de France, t. VII, 1879 enthaltene Notiz aufmerksam, worin Herr Brioschi auf einem von dem unsrigen verschiedenen Wege die Bedingungen herleitet, unter welchen eine Differentialgleichung dritter Ordnung durch die Quadrate der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt wird. In derselben Notiz leitet Herr Brioschi auch die Bedingungen ab dafür, dass einer Gleichung vierter Ordnung die Cuben der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung genügen.

[1]) Abh. XXXIX, S. 289 ff. dieses Bandes. Sch.

oder

$$y^r + \frac{\varphi_1(z_1)}{v} y^{r-1} + \cdots + \frac{\varphi_r(z_1)}{v^r} = 0. \tag{3.}$$

Die Wurzeln der Gleichungen (2.) und (3.) sind übereinstimmend. Ist daher $\varphi_i(z)$ der erste Coefficient in (2.), welcher nicht identisch verschwindet, so ist

$$\varphi_i(z) = \frac{\varphi_i(z_1)}{v^i}$$

335] oder

$$v^i = \frac{\varphi_i(z_1)}{\varphi_i(z)}. \tag{4.}$$

Also ist, wenn man setzt

$$y = F(z),$$

$$\frac{F(z_1)^i}{\varphi_i(z_1)} = \frac{F(z)^i}{\varphi_i(z)}$$

oder

$$\left[\frac{F(z_1)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z_1)}}\right]^i = \left[\frac{F(z)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z)}}\right]^i. \tag{5.}$$

I. Setzt man also

$$y = \sqrt[i]{\varphi_i(z)}\,\omega, \tag{6.}$$

so genügt ω einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$\frac{d^m\omega}{dz^m} + g_1(z)\frac{d^{m-1}\omega}{dz^{m-1}} + \cdots + g_m(z)\omega = 0, \tag{7.}$$

deren Integrale für z_1 auf geeigneten Wegen Werthe annehmen, welche sich von denen in z nur um eine und dieselbe Einheitswurzel als Factor unterscheiden.

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ genau die sämmtlichen Werthe, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (1.) oder was dasselbe ist der Gleichung (7.) in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ je einen gleichen Werth annimmt wie in z, so erhält ein willkürliches Integral der Gleichung (7.) auf denselben Wegen in $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ Werthe, die sich von dem Werthe desselben in z nur durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.

II. Es sei

$$t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)\dots(\alpha - z_{\sigma-1}) = \varphi(z, \alpha), \tag{8.}$$

wo α eine willkürliche Grösse ist, so ist $\varphi(z, \alpha)$ eine rationale Function von z.

Denn da $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ die Gesammtheit der Werthe darstellt, welche jedem Quotienten zweier Integrale der Gl. (1.) denselben Werth verschaffen wie für z, so können durch irgend einen Umlauf von z nur $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ [336 eine Vertauschung unter einander erfahren. Da überdiess vorausgesetzt ist, dass Gl. (1.) algebraisch integrirbar sei, so sind $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ von z algebraisch abhängig, daher ist t eine algebraische Function von z, welche durch Umläufe von z nicht verändert wird, d. h. eine rationale Function von z.

III. Die Function $\varphi(z, \alpha)$ hat die Eigenschaft

$$\varphi(z_\varkappa, \alpha) = \varphi(z, \alpha). \tag{9.}$$

Denn es möge für $z = z_\varkappa$ $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ resp. in $z_1', z_2', \dots, z_{\sigma-1}'$ übergehen. Wenn nicht $z_\varkappa, z_1', z_2', \dots, z_{\sigma-1}'$ abgesehen von der Reihenfolge mit $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}, z$ übereinstimmten, so müsste jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (1.) für mehr als σ Werthe von z je einen gleichen Werth annehmen, gegen unsere Voraussetzung.

IV. Zu einem bestimmten willkürlichen Werthe von t der Gleichung (8.) gehören genau die Werthe $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ von z.

In der That wird nach Satz III. die Gleichung

$$t = \varphi(z, \alpha)$$

durch $z = z$, $z = z_1$, $z = z_2$, $\dots$, $z = z_{\sigma-1}$ befriedigt. Ist andererseits z' ein von diesen verschiedener Werth von z, so kann nicht die Gleichung

$$\varphi(z, \alpha) = \varphi(z', \alpha)$$

bestehen, wegen der Willkürlichkeit von α.

Durch einen beliebigen Umlauf von t muss dem Satze IV. gemäss z in einen der Werthe $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ übergehen. Ist $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7.) zugehörig dem Werthenpaare (t, z), so erhält $\omega_\varkappa$ durch einen beliebigen Umlauf von t, d. h. dem Werthen-

paare $(t, z_\varkappa)$ entsprechend, nach Satz I. den Werth $\omega'_\varkappa$

$$\omega'_\varkappa = j[\alpha_{\varkappa 1}\omega_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa m}\omega_m], \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m) \tag{10.}$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Transformiren wir daher die Gleichung (7.) in eine Gleichung

$$\frac{d^m\omega}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}\omega}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)\omega = 0 \tag{11.}$$

mit der unabhängigen Variabeln t.

337] Nun ist*) für das Werthsystem (t, z)

$$h_i(t) = -\frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{12.}$$

wo

$$\Delta = \sum \pm \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz}\frac{d^2\omega_3}{dz^2}\cdots\frac{d^{m-1}\omega_m}{dz^{m-1}}$$

und Δ_i aus Δ hervorgeht, wenn man die $m-i^{te}$ Horizontalreihe in Δ durch $\frac{d^m\omega_1}{dz^m}, \frac{d^m\omega_2}{dz^m}, \cdots, \frac{d^m\omega_m}{dz^m}$ ersetzt.

In gleicher Weise ist für $(t, z_\varkappa)$

$$h_i(t) = -\frac{\Delta'_i}{\Delta'}, \tag{13.}$$

wo Δ' und Δ'_i aus Δ resp. Δ_i erhalten werden, wenn man $\omega_\varkappa$ durch $\omega'_\varkappa$ ersetzt. Aus Gleichung (10.) ergiebt sich aber:

$$\frac{\Delta'_i}{\Delta'} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{14.}$$

das heisst:

V. Die Coefficienten der Differentialgleichung (11.) sind rationale Functionen von t.

VI. Ist t ein willkürlicher Werth, so giebt es nicht einen davon verschiedenen Werth t_1 von der Beschaffenheit, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11.) auf geeigneten Wegen je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Wenn nämlich jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11.) in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kommt dieselbe Eigenschaft

*) Siehe meine Arbeit Bd. 66 des BORCHARDTschen Journ., S. 143 [1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 183. Sch.

jedem Quotienten zweier Integrale der Gleichung (7.) zu. Dieses ist jedoch nicht möglich. Denn es mögen dem willkürlichen Werthe t die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ von z nach Gl. (8.) entsprechen. Alsdann sind die dem Werthe t_1 nach derselben Gleichung entsprechenden Werthe $z', z_1', z_2', \ldots, z_{\sigma-1}'$ von z sämmtlich von den Werthen $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$ verschieden. Wäre nämlich einer der ersteren mit $z_\varkappa$ übereinstimmend, so wäre

$$t_1 = \varphi(z_\varkappa, \alpha) = \varphi(z, \alpha) = t$$

nach Satz III. Es müsste demnach für das Werthsystem $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma-1}$, [338 $z_1', z_2', \ldots, z_{\sigma-1}'$ jeder Quotient zweier Integrale je einen gleichen Werth annehmen. Der Voraussetzung gemäss soll dieses nur für σ Werthe stattfinden.

Es seien $U_0, U_1, \ldots, U_{\sigma-1}$ die Umläufe von z, für welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1.), y resp. in $y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}$ übergeht, derart dass nicht der Quotient zweier dieser Werthe constant, während jeder andere Umlauf von z jeden dieser Werthe nur in einen derselben mit einem constanten Factor multiplicirten Werthe überführt.

Im Anschluss an eine Bezeichnung, welche ich in meiner Arbeit über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung*) eingeführt habe, will ich im Folgenden $y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}$ ein reducirtes Werthsystem des Integrals y nennen. Die Elemente eines reducirten Werthsystems sind demnach nur bis auf Einheitswurzeln als Factoren bestimmt.

Ein Umlauf s von t führe z in $z_\varkappa$ über auf einem Wege S, welcher das allgemeine Integral ω in $j\omega$ verwandle, wo j eine Einheitswurzel, so werden die Wege $SU_0, SU_1, SU_2, \ldots, SU_{\sigma-1}$ ω resp. in $j\omega, j\omega', j\omega'', \ldots, j\omega^{(r-1)}$ verwandeln, wo $SU_\varkappa$ den aus S und $U_\varkappa$ zusammengesetzten Weg von z bezeichnet, und wo nach Satz I. $\omega, \omega', \omega'', \ldots, \omega^{(r-1)}$ abgesehen von Einheitswurzeln als Factoren durch dieselben Substitutionen aus $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ hervorgehen wie $y, y', \ldots, y^{(r-1)}$ aus $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Die Wege $SU_0, SU_1, \ldots, SU_{\sigma-1}$ bringen alle denselben Werth von t hervor, und die Quotienten zweier der Werthe $j\omega, j\omega', \ldots, j\omega^{(r-1)}$ sind nicht constant. Alle anderen Wege, welche von z nach $z_\varkappa$ überführen, bringen nur Werthe von ω hervor, welche von den zuletzt genannten sich um constante Factoren unterscheiden. Also alle Umläufe

*) BORCHARDTS Journ. Bd. 81, S. 111[1]).

[1]) Abh. XXI, S. 27 dieses Bandes. Sch.

von t, welche von z in $z_\varkappa$ überführen, bringen genau r Werthe hervor, deren Quotienten nicht constant. Die Umläufe von t aber, welche von z nach z_l führen, wo l von $\varkappa$ verschieden, bringen nach demselben Schlusse nur Werthe $j'\omega, j'\omega', j'\omega'', \ldots, j'\omega^{(r-1)}$ hervor, wo j' eine von j verschiedene Einheitswurzel sein kann. Dasselbe gilt von den Umläufen von t, welche $z_\varkappa$ in sich selbst überführen. Demnach ist $\omega, \omega', \omega'', \ldots, \omega^{(r-1)}$ ein reducirtes Werthsystem des willkürlichen Integrals ω der Gleichung (11.), und man erhält den Satz:

VII. Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems 339] eines willkürlichen Integrals der Gleichung (11.) ist übereinstimmend mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines willkürlichen Integrals der Gleichung (1.).

4.

I. Es sei W ein Umlauf der unabhängigen Variabeln z, durch welchen jeder Quotient zweier Integrale der beliebigen Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

mit rationalen Coefficienten unverändert bleibt, so wird durch denselben Umlauf jedes Integral in sich selbst multiplicirt mit einer und derselben Constanten übergeführt.

Es sei in der That $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), so ist

$$\sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} = e^{-\int p_1 dz} \text{ *}). \tag{2.}$$

Der Voraussetzung gemäss gehen nach Vollzug des Umlaufes W die Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_m$ resp. in $y_1 v, y_2 v, \ldots, y_m v$ über. Daher ist nach Gleichung (2.)

$$\sum \pm (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \frac{d^2(vy_3)}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^{m-1}} = je^{-\int p_1 dz}, \tag{3.}$$

wo j eine Constante bedeutet. Nun aber ergiebt sich identisch

$$\sum \pm (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^m} = v^m \sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}}. \tag{4.}$$

*) Siehe meine Abhandlung Bd. 66 des BORCHARDTschen Journ., S. 128[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 166. Sch.

Aus den Gleichungen (2.), (3.), (4.) folgt demnach

$$v^m = j, \tag{5.}$$

womit unser Satz erwiesen ist.

Es sei die Differentialgleichung [340

$$\frac{d^m v}{dt^m} + q_1(t)\frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}} + \cdots + q_m(t)v = 0 \tag{6.}$$

mit in t rationalen Coefficienten, von welchen der mit $\frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}}$ multiplicirte verschwindet, algebraisch integrirbar. Setzt man

$$t = \frac{1}{\xi},$$

so verwandelt sich die Gleichung (6.) in

$$\frac{d^m v}{d\xi^m}\xi^{2m} + m(m-1)\frac{d^{m-1}v}{d\xi^{m-1}}\xi^{2m-1} + \cdots = 0. \tag{6a.}$$

Bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \ldots, s_m$ die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ergiebt sich aus Gl. (6a.)

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = -\frac{m(m-1)}{2}. \tag{7.}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass wenigstens eine der Grössen $s_1, s_2, \ldots, s_m$ negativ und absolut grösser als $\frac{m-1}{2}$, da nicht zwei derselben einander gleich sein können in Folge der Voraussetzung, dass Gleichung (6.) algebraisch integrirbar*).

Ein willkürliches Integral v der Gleichung (6.) hat die Form

$$v = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m, \tag{8.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürliche Constanten, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ das zu $t = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen bedeuten. Daher ist v für $t = \infty$ unendlich wie eine Potenz t^r, deren Exponent r grösser als $\frac{m-1}{2}$.

Nach einem beliebigen Umlaufe von t gehe v über in v', wo

$$\begin{aligned} v' &= c_1'\eta_1 + c_2'\eta_2 + \cdots + c_m'\eta_m, \\ c_\varkappa' &= c_1\alpha_{1\varkappa} + c_2\alpha_{2\varkappa} + \cdots + c_m\alpha_{m\varkappa}, \end{aligned} \tag{9.}$$

*) Siehe meine Abhandlung Bd. 66 des BORCHARDTschen Journ., S. 157 [1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 199. Sch.

341] wenn durch denselben Umlauf $\eta_\varkappa$ in $\eta'_\varkappa$ übergeführt wird, wo

$$\eta'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1}\eta_1 + \alpha_{\varkappa 2}\eta_2 + \cdots + \alpha_{\varkappa m}\eta_m.$$

Da die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürlich angenommen wurden und die Determinante der Grössen $\alpha_{i\varkappa}$ nicht verschwindet, so kann man $c_1, c_2, \ldots, c_m$ so wählen, dass auch in v' das Glied, welches wie t^r unendlich wird, nicht herausfällt. Daher ist auch v' für $t = \infty$ unendlich wie t^r.

Bildet man daher das Product der μ verschiedenen Werthe von v, welche allen Umläufen von t entsprechen, so ist dasselbe für $t = \infty$ unendlich wie $t^{\mu r}$. Es ist daher die irreductible algebraische Gleichung, welcher das allgemeine Integral v genügt, mindestens vom Grade $r\mu$, also höheren als $\frac{\mu(m-1)^{\text{ten}}}{2}$ Grades in Bezug auf t.

Wir wollen jetzt von der Gleichung (6.) voraussetzen, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale derselben Gleichung je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Es mögen nun einem beliebigen Werthe eines willkürlichen Integrals v_1 der Gl. (6.) ξ verschiedene Werthe von t, nämlich $t, t_1, t_2, \ldots, t_{\xi-1}$ entsprechen. Alsdann gehören zwei Werthenpaaren $(v_1, t_\varkappa)$, (v_1, t_l), wo $\varkappa \lesseqgtr l$, zwei verschiedene Werthe eines von v_1 verschiedenen willkürlichen Integrals v_2 zu, da sonst jeder Quotient zweier Integrale für zwei verschiedene Werthe von t gleiche Werthe annehmen müsste, gegen unsere Voraussetzung. Demnach entsprechen einem Werthe von v_1 genau ξ Werthe von v_2, und einem Werthe von v_2 genau ξ Werthe von v_1, und es findet zwischen v_1, v_2 eine irreductible algebraische Gleichung

$$\varphi(v_1, v_2) = 0 \tag{10.}$$

statt, vom Grade ξ sowohl in Bezug auf v_1 als auch in Bezug auf v_2. Da v_1, v_2 nur gleichzeitig, nämlich für singuläre Punkte der Gl. (6.) oder für $t = \infty$ unendlich werden, so ist der Coefficient von v_1^ξ eine Constante, die Coefficienten aller übrigen Potenzen von v_1 ganze rationale Functionen von v_2, und zwar der Coefficient von v_1^0 vom Grade ξ in v_2, die übrigen Coefficienten von niedrigerem Grade in v_2. Umgekehrt ist der Coefficient von v_2^ξ eine Constante, die Coefficienten der übrigen Potenzen von v_2 ganze rationale Functionen

von v_1, der Coefficient von v_2^0 vom Grade ξ in v_1, die übrigen Coefficienten [342 von niedrigerem Grade in v_1. Wir setzen zunächst voraus, dass nicht für einen Werth von t jedes willkürliche Integral verschwinde. Dann enthält die Gleichung (10.) ein von v_1, v_2 freies Glied.

Wir substituiren nun in Gl. (10.)

$$v_2 = v_1 u, \tag{11.}$$

wodurch diese Gleichung in

$$\psi(u, v_1) = 0 \tag{12.}$$

übergeführt werde. Die Gleichung (12.) ist sowohl in Bezug auf u als auch in Bezug auf v_1 vom Grade ξ. Da die Gleichung (10.) in Bezug auf v_1, v_2 irreductibel ist, so kommt diese Eigenschaft auch der Gleichung (12.) in Bezug auf u und v_1 zu. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von u genau ξ Werthe von v_1.

Wenn es Umläufe von t giebt, welche ein willkürliches Integral v der Gl. (6.) in jv überführen, so ist nach Satz I. j eine Constante, und zwar, weil v eine algebraische Function von z, eine Einheitswurzel. Die zu allen solchen Umläufen gehörigen Werthe von j genügen daher einer Gleichung

$$x^\lambda = 1 \tag{13.}$$

wo λ eine ganze Zahl.

Nach Satz I. werden v_1^λ und u durch dieselben Umläufe von t verändert und nicht verändert, daher ist v_1^λ eine rationale Function von t und u. Es mögen nun einem willkürlichen Werth von u α verschiedene Werthe von t entsprechen, so entsprechen also demselben Werthe von u höchstens $\lambda\alpha$ verschiedene Werthe von v_1. Es ist also

$$\lambda\alpha \geqq \xi. \tag{14.}$$

Nach einem Satze meiner Abhandlung über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen*) haben die Exponenten von v_1 in der irreductiblen Gleichung zwischen v_1 und t den grössten gemeinschaftlichen Theiler λ.

*) Siehe BORCHARDTS Journ. Bd. 81, S. 112[1]).

[1]) Abd. XXI, S. 27 dieses Bandes. Sch.

343] Ist daher ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des willkürlichen Integrals v_1, so ist

(15.) $$\mu = \lambda\nu.$$

Nach den obigen Entwickelungen ist

(16.) $$\xi > \frac{\mu(m-1)}{2}.$$

Aus den Gleichungen (14.), (15.), (16.) ergiebt sich demnach

(17.) $$\alpha > \frac{\nu(m-1)}{2}.$$

Wenn es Werthe von t giebt, für welche jedes Integral der Gleichung (6.) verschwindet, so gehören dieselben zu den singulären Punkten dieser Gleichung.

Es sei in diesem Falle

(18.) $$\omega_1 = v_1 + \varkappa_1, \quad \omega = v_2 + \varkappa_2,$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ willkürliche Constanten bedeuten. Die Functionen ω_1, ω_2 werden für $t = \infty$ und für diejenigen singulären Punkte der Gleichung (6.), für welche v_1, v_2 unendlich werden, gleichzeitig unendlich. Für die singulären Punkte derselben Gleichung, für welche v_1, v_2 gleichzeitig verschwinden, erhalten sie die von Null verschiedenen Werthe $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Sie werden aber auch nicht für irgend einen anderen Werth von t gleichzeitig Null, da man $\varkappa_2$ so wählen kann, dass für diejenigen Werthe von t, für welche v_1 den Werth $-\varkappa_1$ erhält, v_2 nicht gleich $-\varkappa_2$ werde. Setzt man daher in Gl. (10.) $\omega_1 - \varkappa_1$, $\omega_2 - \varkappa_2$ resp. für v_1, v_2, so erhält man eine in Bezug auf ω_1, ω_2 irreductible Gleichung

(10a.) $$\varphi_1(\omega_1, \omega_2) = 0$$

vom Grade ξ sowohl in Bezug auf ω_1 als auch in Bezug auf ω_2. Die Coefficienten von ω_2^ξ und von ω_1^ξ sind Constanten, während die Coefficienten der übrigen Potenzen von ω_1, ω_2 resp. in Bezug auf ω_2, ω_1 von niedrigerem Grade als dem ξ^{ten} sind. Die Gleichung (10a.) enthält ein von ω_1, ω_2 freies Glied.

Setzt man daher in diese Gleichung

(11a.) $$\omega_2 = p\omega_1,$$

344] so geht sie in die in Bezug auf p und ω_1 irreductible Gleichung

(12a.) $$\psi_1(p, \omega_1) = 0$$

über, welche in Bezug auf jede der Variabeln p und ω_1 vom Grade ξ ist. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von p genau ξ Werthe von ω_1.

Da x_1, x_2 willkürlich gewählte Grössen bedeuten, so folgt, dass alle Umläufe von t, welche p ungeändert lassen, gleichzeitig v_1, v_2 also auch ω_1, ω ungeändert lassen. Demnach ist ω_1 eine rationale Function von p und t. Ist daher β die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe von p entsprechen, so ist die Anzahl der Werthe ω, welche demselben Werthe von p zugehören, nicht grösser als β. Demnach ist

(14a.) $$\xi \leqq \beta$$

oder

(16a.) $$\beta > \frac{\mu(m-1)}{2}.$$

Die Anzahl der allen möglichen Umläufen von t entsprechenden Werthe von v_1 und v_2, folglich auch von p ist gleich μ. Daher genügt p einer irreductiblen Gleichung

(19.) $$p^\mu + B_1 p^{\mu-1} + \cdots + B_\mu = 0.$$

Da einem willkürlichen Werthe von p β verschiedene Werthe von t entsprechen, so erhält p als rationale Function von t und v_1 an mindestens β Stellen der RIEMANNschen Fläche (t, v_1) einen gleichen Werth. Diese Function wird also auch in mindestens β Stellen dieser Fläche Null und unendlich. Da aber p nur für das System derjenigen endlichen nicht singulären Werthe von t unendlich wird, für welche ω_1 verschwindet, und nur für diejenigen endlichen nicht singulären Werthe von t Null wird, für welche ω_2 verschwindet, diese beiden Werthsysteme aber kein gemeinschaftliches Element besitzen, so folgt, dass

(20.) $$B_\mu = \frac{G(t)}{H(t)},$$

wo $G(t)$, $H(t)$ ganze rationale Functionen, ohne gemeinschaftlichen Theiler, beide mindestens vom Grade β.

Nun sei [345

(19a.) $$u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0$$

die irreductible Gleichung, welcher u genügt, und setzen wir

(20a.) $$A_\nu = \frac{G_1(t)}{H_1(t)},$$

wo $G_1(t)$, $H_1(t)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinschaftlichem Theiler. Es bedeute ϱ den höheren der beiden Grade derselben.

Setzt man in (19.) $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$, so wird $p = u$, und es werden je λ Wurzeln dieser Gleichung, welche solchen Umläufen von t entsprechen, durch die ein willkürliches Integral v der Gleichung (6.) mit einer Einheitswurzel j multiplicirt wurde, einander gleich. Es ist demnach

$$(21.) \qquad (u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu)^\lambda = u^\mu + B_1^{(0)} u^{\mu-1} + \cdots + B_\mu^{(0)},$$

wo $B_i^{(0)}$ den Werth von B_i für $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ bedeutet. Hieraus folgt

$$(22.) \qquad A_\nu^\lambda = B_\mu^{(0)}.$$

Die Werthsysteme, für welche p unendlich oder Null wird, gehen für $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ in Werthsysteme über, für welche u resp. unendlich oder Null wird. Da u nur für endliche nicht singuläre Werthe von t unendlich oder Null wird, so enthalten auch die beiden letzteren Werthsysteme kein gemeinschaftliches Element. Bezeichnet man daher mit $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ die Resultate der Substitution von $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ in $G(t)$, $H(t)$, so haben $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, und es folgt aus Gl. (22.) oder

$$\left[\frac{G_1(t)}{H_1(t)}\right]^\lambda = \frac{G^{(0)}(t)}{H^{(0)}(t)},$$

dass die Grade von $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ genau das λ-fache resp. der Grade von $G_1(t)$, $H_1(t)$ sind. Daher ist

$$\lambda\varrho \geqq \beta,$$

also nach Gleichung (16a.)

$$(23.) \qquad \varrho > \frac{\nu(m-1)}{2}.$$

346] Aus (17.) und (23.) folgt, dass die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe von u entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist.

Es sei

$$(24.) \qquad \frac{d^m y}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)y = 0$$

eine beliebige lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche

nur algebraische Integrale besitzt. Setzt man

$$y = e^{-\frac{1}{m}\int h_1(t)\,dt} v, \tag{25.}$$

so erhält man für v eine wie (6.) beschaffene Differentialgleichung.

Setzen wir voraus, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (24.) in t_1 denselben Werth wie in t annehme, so besitzt die wie Gl. (6.) beschaffene Gleichung dieselbe Eigenschaft. Es ist daher die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche dem Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der wie (6.) beschaffenen Gleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$, wenn ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals dieser Gleichung bedeutet. Aus Gl. (25.) ergiebt sich, dass ν auch die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24.) bedeutet. Da andererseits für zwei Werthe von t, für welche ein Quotient zweier willkürlicher Integrale der wie (6.) beschaffenen Gleichung gleiche Werthe annimmt, auch der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (24.) gleiche Werthe erhält, und umgekehrt, so folgt, dass auch die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der Gleichung (24.) entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist, wo ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24.) bedeutet.

Unter Berücksichtigung der Sätze I., VI., VII. der No. 3 erhält man daher das folgende Theorem:

II. Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals einer beliebigen linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung [347 m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe der unabhängigen Variabeln, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale derselben Differentialgleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$.

5.

Wir betrachten die Gleichung (B.) als eine algebraische Gleichung zwischen η, ζ und bezeichnen nach RIEMANN mit p die Klasse dieser algebraischen Gleichung, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien $J_1, J_2, \ldots, J_p$ solche linear unabhängige Integrale erster Gattung, in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn ARONHOLD*) von CLEBSCH und Herrn GORDAN**) eingeführt worden ist, so dass also

$$(1.) \qquad dJ_\varkappa = \frac{\varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3)}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} \sum \pm c_1 y_2 dy_3 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, p),$$

wo $\varphi_\varkappa = 0$ eine Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämmtlichen Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Curve (B.) hindurchgeht.

Nach No. 2 ist

$$(2.) \qquad \sum \pm c_1 y_2 dy_3 = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)\Delta dz$$

und nach Gleichung (C.)

$$(3.) \qquad c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) M;$$

folglich ist

$$(4.) \qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = \frac{\Delta}{M} dz.$$

Nach No. 1 Gl. (24.) ist

$$(5.) \qquad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\Delta}{y_1^3}.$$

348] Andererseits ist nach Gl. (C.)

$$(6.) \qquad \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\zeta}{dz} : \frac{d\eta}{dz} = -\frac{u_2}{u_3} = -\frac{f_2}{f_3},$$

wenn man zur Abkürzung $f_\varkappa$ für $\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ setzt. Bezeichnet man ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y_\iota \partial y_\varkappa}$ mit $f_{\iota\varkappa}$, und mit $F_{\iota\varkappa}$ den Coefficienten von $f_{\iota\varkappa}$ in der HESSEschen Covariante von f,

*) Monatsberichte der K. Akademie der Wissensch. zu Berlin, April 1861.

**) Theorie der ABELschen Functionen, S. 2.

so folgt

$$d\frac{d\zeta}{d\eta} = [F_{11}(y_2dy_3 - y_3dy_2) + F_{12}(y_3dy_1 - y_1dy_3) + F_{13}(y_1dy_2 - y_2dy_1)]\frac{1}{(n-1)f_3^2},$$

also

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3)y_1^2}{u_3(n-1)f_3^2},$$

demnach nach Gl. (C.)

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}f_1 + F_{12}f_2 + F_{13}f_3)y_1^2}{(n-1)f_3^3},$$

also endlich

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{(n-1)^2}\frac{H(f)y_1^2}{f_3^3}. \tag{7.}$$

Substituirt man diesen Werth in (5.) und setzt ausserdem für $\frac{d\eta}{dz}$ seinen Werth

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\Delta}{y_1^2}u_3 = \frac{\Delta}{y_1^2}\frac{f_3}{M},$$

so folgt

$$\frac{1}{M^2} = \frac{(n-1)^2}{\Delta^2 X(z)}, \tag{8.}$$

also ist nach Gl. (4.)

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}dz. \tag{9.}$$

In den Gln. (4.) und (9.) sind Δ, M, X Wurzeln rationaler Functionen von z, und zwar hat X dieselbe Bedeutung wie in Gl. (2.) No. 1, M dieselbe Bedeutung wie in Gl. (C.), während

$$\Delta = e^{-\int p\,dz}. \tag{10.}$$

Durch einen beliebigen Umlauf von z möge $y_\varkappa$ in $y'_\varkappa$ übergehen, wo [349

$$y'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1}y_1 + \alpha_{\varkappa 2}y_2 + \alpha_{\varkappa 3}y_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{11.}$$

so genügen y'_1, y'_2, y'_3 der irreductiblen Gleichung

$$f(y'_1, y'_2, y'_3) = 0. \tag{12.}$$

Es sind demnach $\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) = 0$ Curven $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung in y'_1, y'_2, y'_3, welche

durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von (12.) hindurchgehen. Daher sind

$$J'_\varkappa = \int \frac{\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) \sum \pm c_1 y'_2 dy'_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y'_3}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

die p linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu der Gleichung (12.) gehören. Diese Integrale als Functionen von z sind demnach für keinen Werth von z unendlich. Setzt man für y'_1, y'_2, y'_3 ihre Werthe aus Gl. (11.) in $\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)$, so wird

$$\varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3) = \psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3),$$

wo $\psi_\varkappa$ eine ganze rationale und homogene Function $n-3^{\text{ten}}$ Grades ist. Ferner hat man nach Gl. (4.) oder Gl. (9.)

$$\frac{\sum \pm c_1 y'_2 dy'_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y'_3}} = j \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}},$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet, folglich ist

$$J'_\varkappa = j \int \frac{\psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} \sum \pm c_1 y_2 dy_3.$$

Da $J'_\varkappa$ für keinen Werth von z, folglich auch für kein Werthsystem y_1, y_2, y_3 unendlich wird, so ist $J'_\varkappa$ ein Integral erster Gattung gehörig zur Gleichung (B.). Hieraus ergiebt sich, dass $\psi_\varkappa(y_1, y_2, y_3) = \varphi_\varkappa(y'_1, y'_2, y'_3)$ durch eine lineare homogene Function von $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \ldots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ dargestellt wird, oder:

350] I. Die Functionen $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \ldots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ genügen einer linearen homogenen Gleichung p^{ter} Ordnung

$$\text{(D.)} \qquad \frac{d^p \omega}{dz^p} + Q_1 \frac{d^{p-1} \omega}{dz^{p-1}} + \cdots + Q_p \omega = 0$$

mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei U ein Umlauf der Variabeln z, durch welchen ein Quotient λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) ungeändert bleibt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, wo y'_1, y'_2, y'_3 die Functionen bedeuten, in

welche resp. y_1, y_2, y_3 durch denselben Umlauf übergehen, nämlich

$$y'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1} y_1 + \alpha_{\varkappa 2} y_2 + \alpha_{\varkappa 3} y_3. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{13.}$$

Ist alsdann $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, $y_3 = b_3$ ein Werthsystem, für welches λ Null oder Unendlich wird, und setzt man

$$b'_\varkappa = \alpha_{\varkappa 1} b_1 + \alpha_{\varkappa 2} b_2 + \alpha_{\varkappa 3} b_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{14.}$$

so wird λ auch für $y_1 = b'_1$, $y_2 = b'_2$, $y_3 = b'_3$ Null resp. unendlich. Fixirt man daher $p-1$ willkürliche Werthsysteme

$$b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} \quad \text{von} \quad y_1, y_2, y_3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

für welche λ unendlich wird, so wird λ auch für die $p-1$ Werthsysteme

$$b'_{i\varkappa} = \alpha_{\varkappa 1} b_{i1} + \alpha_{\varkappa 2} b_{i2} + \alpha_{\varkappa 3} b_{i3} \quad (\varkappa = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{15.}$$

von y_1, y_2, y_3 unendlich.

Nach der Voraussetzung ist nicht gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$. Andererseits ist auch nicht gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$ $(l \gtrless i)$ oder $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$, $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$, da man die Werthe von z, welche zu einem Systeme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und zu einem Systeme b_{l1}, b_{l2}, b_{l3} gehören, vollständig von einander unabhängig gewählt hat. Demnach constituiren die Werthsysteme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und die Werthsysteme $b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3}$ $2p-2$ verschiedene Werthsysteme, für welche λ unendlich wird.

Bezeichnet man die durch zweimalige Wiederholung der Substitution (13.) aus b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} hervorgehenden Werthe mit $b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3}$, so ist erstlich nicht [351 gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b''_{l2}}{b''_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b''_{l3}}{b''_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$ $(i \gtrless l)$ aus denselben Gründen wie oben. Andererseits ist auch, weil wir die zu b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} gehörigen Werthe von z willkürlich gewählt haben, nicht gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, ohne dass auch gleichzeitig

$$\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}} \quad \text{und} \quad \frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}. \tag{16.}$$

Da nun λ durch den Umlauf U von z ungeändert bleibt, so muss diese Function auch für die Werthsysteme $b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3}$ unendlich werden. Nun aber kann λ ausser für die $2p-2$ verschiedenen Werthsysteme (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), $(b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3})$

nicht mehr unendlich werden, da bekanntlich der Quotient der Differentiale zweier Integrale erster Gattung der Klasse p für nicht mehr als $2p-2$ Stellen der RIEMANNschen Fläche unendlich wird*); es müssen demnach die Gln. (16.) stattfinden. Dieselben liefern wegen der willkürlichen Wahl der zu b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} gehörigen Werthe von z den Satz:

II. Giebt es einen Umlauf U von z, welcher y_1, y_2, y_3 überführt resp. in y_1', y_2', y_3' und zugleich den Quotienten λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) unverändert lässt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y_2'}{y_1'} = \frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y_3'}{y_1'} = \frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.

Wenn ausser dem Umlaufe U noch ein anderer $\overline{U}$ die Eigenschaft hat, dass durch dessen Anwendung λ ungeändert bleibt, ohne dass zugleich der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A.) ungeändert bleibt, so ergiebt sich wiederum aus dem Umstande, dass λ nur für $2p-2$ Werthsysteme von y_1, y_2, y_3 unendlich werden kann, wenn man mit $\overline{b_{ix}}$ den durch Anwendung der $\overline{U}$ entsprechenden Substitution aus b_{ix} hergeleiteten Werth bezeichnet, dass

$$(17.) \qquad \frac{\overline{b_{i2}}}{\overline{b_{i1}}} = \frac{b_{i2}'}{b_{i1}'}, \qquad \frac{\overline{b_{i3}}}{\overline{b_{i1}}} = \frac{b_{i3}'}{b_{i1}'},$$

352] d. h. wegen der willkürlichen Wahl der zu b_{ix} gehörigen Werthe von z, der Umlauf $\overline{U}$ führt den Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A.) in denselben Werth über wie U, oder, was nach dem Satze I. No. 4 dasselbe ist, der Umlauf $\overline{U}$ führt y_1, y_2, y_3 resp. in jy_1', jy_2', jy_3' über, wenn U dieselben Functionen resp. in y_1', y_2', y_3' überführt, und wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Es seien $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{\sigma-1}$ diejenigen Umläufe von z, welche ein reducirtes Werthsystem eines willkürlichen Integrals ω der Gl. (D.), nämlich $\omega, \omega', \omega'', \ldots, \omega^{(\sigma-1)}$ hervorbringen. Jeder andere Umlauf bringt also nur einen dieser Werthe mit einer Einheitswurzel multiplicirt hervor. Den Umläufen $S_0, S_1, \ldots, S_{\sigma-1}$ entsprechen die Werthe $y, y', y'', \ldots, y^{(\sigma-1)}$ eines willkürlichen Integrals y der Gleichung (A.). Es können nicht zwei der letztgenannten Werthe ein constantes Verhältniss besitzen, da sonst auch zwei entsprechende

*) RIEMANN, Abelsche Functionen, in BORCHARDTs Journ., Bd. 54[1]).

1) Riemanns Werke (1892), S. 88ff. Sch.

Werthe der Reihe $\omega, \omega', \omega'', \ldots, \omega^{(\sigma-1)}$ ein constantes Verhältniss hätten. — Die Umläufe $S_0U, S_1U, \ldots, S_{\sigma-1}U$ erzeugen die Werthe $y^{(\sigma)}, y^{(\sigma+1)}, \ldots, y^{(2\sigma-1)}$, während dieselben $\omega, \omega', \ldots, \omega^{(\sigma-1)}$ nur mit constanten Factoren multipliciren. Die Werthe $y^{(\sigma)}, y^{(\sigma+1)}, \ldots, y^{(2\sigma-1)}$ unterscheiden sich der Voraussetzung nach von $y, y', y'', \ldots, y^{(\sigma-1)}$ nicht bloss um constante Factoren. Jeder andere Umlauf von z bringt aber nach dem obigen nur Werthe hervor, welche gleich sind einem der Werthe der Reihe $y, y', y'', \ldots, y^{(2\sigma-1)}$ multiplicirt mit einer Constanten. Diese letztere Reihe ist also ein reducirtes Werthsystem von y.

Giebt es aber keinen Umlauf der Art U, so ist $y, y', y'', \ldots, y^{(\sigma-1)}$ ein reducirtes Werthsystem von y. Man erhält also den Satz

III. Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A.), so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (D.), je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

Es seien (η_i, ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, 2p-2$, die $2p-2$ Stellen der RIEMANNschen Fläche (η, ζ), in welchen λ einen willkürlich vorgeschriebenen Werth annimmt. Von diesen Stellen können $p-1$ willkürlich gegeben sein. Wir bezeichnen die letzteren mit $(\eta_1, \zeta_1), \ldots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$; dieselben können so gewählt werden, dass sie zu $p-1$ verschiedenen Werthen von z gehören. Wenn zu einer der übrigen Stellen $(\eta_p, \zeta_p), \ldots, (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ ein Werth von z gehört, welcher auch einer der ersteren $p-1$ Stellen entspricht, wenn z. B. $(\eta_{p+\varkappa}, \zeta_{p+\varkappa})$ zu demselben z gehört, wie (η_i, ζ_i), so gäbe es einen Umlauf von z, welcher η_i, ζ_i resp. [353 in $\eta_{p+\varkappa}, \zeta_{p+\varkappa}$ überführte. Da durch denselben Umlauf λ in sich selbst übergeführt wird, und bei willkürlicher Wahl von $(\eta_1, \zeta_1), \ldots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ die Gleichungen $\eta_{p+\varkappa} = \eta_i$, $\zeta_{p+\varkappa} = \zeta_i$ nicht gleichzeitig erfüllt sind, so wäre dieser Umlauf der Art U.

Giebt es also keinen Umlauf der Art U, so gehören zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(2p-2)$ verschiedene Werthe von z, wenn man mit ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bezeichnet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Wenn es aber einen Umlauf der Art U giebt, so mögen mit η', ζ' die Werthe bezeichnet werden, in welche derselbe η, ζ überführt. Es nimmt als-

dann λ für $(\eta_1', \zeta_1'), \ldots, (\eta_{p-1}', \zeta_{p-1}')$ denselben Werth an wie für $(\eta_1, \zeta_1), \ldots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$. Da diese letzteren Stellen untereinander verschieden sind, so sind es auch die ersteren. Der Voraussetzung gemäss ist auch keine der ersteren mit einer der letzteren übereinstimmend. Es fallen demnach $(\eta_p, \zeta_p), \ldots, (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ mit $(\eta_1', \zeta_1'), \ldots, (\eta_{p-1}', \zeta_{p-1}')$ zusammen. Da die Werthe von z, welche zu den verschiedenen Stellen $(\eta_1, \zeta_1), \ldots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ gehören, von einander verschieden sind, so ergiebt sich, dass in dem Falle der Existenz eines Umlaufes der Art U zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(p-1)$ verschiedene Werthe von z gehören. Man erhält also den Satz:

IV. Je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt, ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von z, welche zu einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D.) gehören, $\varepsilon(p-1)$ oder $2\varepsilon(p-1)$, wenn ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bedeutet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Besitzt die Gl. (A.) die Eigenschaft, dass nicht zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so ist $\varepsilon = 1$. Es folgt alsdann nach Satz II. No. 4, Satz III. und Satz IV. dieser No.

$$\text{(E.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} p-1 \geqq \dfrac{p-1}{2}\,\dfrac{1}{2}\,\nu \\ \text{oder} \\ 2(p-1) \geqq \dfrac{p-1}{2}\,\nu, \end{array} \right.$$

je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

354] In beiden Fällen folgt für $p > 1$

$$\text{(F.)} \qquad \nu \leqq 4.$$

Wenn zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört von der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kann man, da $n > 2$, also die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar vorausgesetzt ist, nach No. 3 durch Multiplication der abhängigen Variabeln y mit einer Wurzel einer rationalen Function von z und Transformation der unabhängigen Variabeln z in eine Veränderliche t die

Gleichung (A.) in eine Gleichung überführen der Form

$$(A''.) \qquad \frac{d^3\omega}{dt^3} + h_1(t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + h_2(t)\frac{d\omega}{dt} + h_3(t)\omega = 0 \qquad \text{(s. dort Gl. (11.))}$$

mit rationalen Coefficienten, welche die Eigenschaft besitzt, dass nicht zu einem willkürlichen Werthe von t ein Werth t_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A''.) in t und t je einen gleichen Werth annimmt. (Satz VI. No. 3).

Die Natur der Transformationen, welche von (A.) zu (A''.) führen, bringt es mit sich, dass die Gleichung (B.) auch für ein Fundamentalsystem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ von Integralen der Gl. (A''.) bestehen bleibt, dass also

$$(18.) \qquad f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0.$$

Bildet man die zu (18.) gehörigen Integrale erster Gattung, so ist demnach die Anzahl der linear unabhängigen ebenfalls p. Da ferner nach Satz VII. No. 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A''.) mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A.) übereinstimmt, so ergiebt sich, dass die Gleichungen (E.) und (F.) auch bestehen bleiben, wenn für einen willkürlichen Werth von z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt.

Das durch (F.) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

V. Ist die Klasse p der Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A.) nicht grösser als Vier, oder, was dasselbe ist, die Anzahl der reducirten Wurzeln*) [355 der algebraischen Gleichung, welcher dieses allgemeine Integral genügt, ist nicht grösser als Vier.

*) Über die Bedeutung dieser Bezeichnung s. meine Arbeit in BORCHARDTS Journal Bd. 81, S. 111, No. 9[1]).

[1]) Abh. XX, S. 27 dieses Bandes. Sch.

6.

Für

$$p = 1$$

gehört zur Gl. (B.) nur ein Integral erster Gattung J. Es sei wie in No. 5

$$dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3) \sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}. \tag{1.}$$

Führt man auf der rechten Seite die Variabeln η, ζ ein, so erhält man

$$dJ = \varphi_1(\eta, \zeta) d\eta, \tag{2.}$$

wo φ_1 eine rationale Function von η, ζ. Andererseits sind ζ und $\frac{d\eta}{dz}$ rationale Functionen von η, z. Folglich erhält man für die unabhängige Variable z

$$dJ = \psi(z, \eta) dz, \tag{3.}$$

wo ψ eine rationale Function von z, η.

Nach No. 5 wird entsprechend einem Umlauf von z, welcher y_1, y_2, y_3 resp. in y_1', y_2', y_3' überführt,

$$\varphi(y_1', y_2', y_3') = j\varphi(y_1, y_2, y_3), \tag{4.}$$

wo j eine Constante und zwar, weil für $n > 2$ $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine algebraische Function von z ist, eine Einheitswurzel bedeutet. Demnach ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine Wurzel einer rationalen Function von z. Aus dieser Bemerkung und aus Gleichung (4.) oder Gl. (9.) No. 5 ergiebt sich demnach, dass auch

$$dJ = R dz, \tag{5.}$$

wo R Wurzel einer rationalen Function von z bedeutet.

356] Setzen wir voraus, dass die Gleichung (A.) so beschaffen sei, dass nicht für einen willkürlichen Werth von z und noch für andere Werthe von z jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A.) je einen gleichen Werth annimmt, so ist demnach z eine rationale Function von η, ζ. Da wir vorausgesetzt haben, dass J das zu (η, ζ) gehörige Integral erster Gattung sei, so sind η, ζ eindeutige Functionen von J, folglich ist auch z eine eindeutige Function von J.

Demnach ergiebt sich aus dem Bestehen der Gleichung (5.) nach den Untersuchungen der Herren BRIOT und BOUQUET*), dass R^4 oder R^6 eine rationale Function von z sein müsse.

Unter derselben Voraussetzung über die Gl. (A.) ergiebt sich auch, dass η, z eindeutige Functionen von J. Demnach ist auch die Klasse der algebraischen Function η von z gleich Eins und $\psi(z,\eta)$ nach Gleichung (3.) die Ableitung des zu (z,η) gehörigen Integrals erster Gattung.

Der Ausdruck

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+c_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

bleibt ungeändert, wenn man an die Stelle von $y_\varkappa$ setzt $b_{\varkappa 1}y_1+b_{\varkappa 2}y_2+b_{\varkappa 3}y_3$, wo $b_{\varkappa\lambda}$ beliebige Constanten bedeuten, d. h. der genannte Ausdruck ist von der Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 unabhängig. Gleichermassen ist $\varphi(y_1,y_2,y_3)$ bis auf einen constanten Factor von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig, folglich ist auch bis auf einen constanten Factor R von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig.

Aus (3.) und (5.) folgt

$$R = \psi(z,\eta), \tag{6.}$$

d. h. es ist R eine rationale Function von η, z. Wir behaupten aber, dass auch umgekehrt η eine rationale Function von z, R ist. Denn gäbe es einen Umlauf von z, welcher R ungeändert liesse, dagegen η in η' verwandelte, so würde in den beiden Blättern η, η' der RIEMANNschen Fläche der algebraischen Function η von z die Function R für dasselbe z denselben Werth annehmen. Wir können aber das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 so wählen, dass für [357 $z = z_1$, wo z_1 ein willkürlicher Werth, in den beiden genannten Blättern η denselben Werth η_1 erhält. Dann ist

$$\int_{(z_1,\eta_1)}^{(z,\eta)} \psi(z,\eta)\,dz \equiv \int_{(z_1,\eta_1)}^{(z,\eta')} \psi(z,\eta)\,dz, \tag{7.}$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln, für Integrationswege, welche in den beiden Blättern η, η' übereinander laufen. Es ist demnach in

*) Journal de l'École Polytechnique, t. 21, p. 222.

der genannten RIEMANNschen Fläche

$$(8.) \qquad \int_{(z,\eta)}^{(z,\eta')} \psi(z,\eta)\,dz \equiv 0,$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln. Aus Gl. (8.) folgt nach einem bekannten Satze, dass es eine rationale Function von z, η giebt, welche für einen beliebig gegebenen Werth und nur für diesen unendlich wird, dass demnach die Klasse der algebraischen Function η von z gleich Null sei. Da aber nach dem oben Bewiesenen diese Klasse gleich Eins, so folgt, dass es keinen Umlauf von z giebt, welcher R ungeändert lässt, ohne gleichzeitig η ungeändert zu lassen, dass also η eine rationale Function von z, R ist.

Da eine gewisse Potenz jedes Integrals der Gleichung (A.) eine rationale Function von η, z ist, so ergiebt sich auch, dass eine gewisse Potenz jedes solchen Integrals durch eine rationale Function von z, R dargestellt werden kann.

Es ist daher, wenn λ eine gewisse ganze Zahl bedeutet,

$$(9.) \qquad y^\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 R^3 \quad \text{oder} \quad y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 R + \cdots + \beta_5 R^5,$$

je nachdem R^4 oder R^6 rationale Function von z wird, wenn man mit $\alpha_\varkappa$ und $\beta_\varkappa$ rationale Functionen von z bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A.) wird daher durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Da nach S. VII. No. 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A.) stets gleich ist derselben Anzahl für eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Eigenschaft 358] hat, dass nicht für einen willkürlichen Werth der unabhängigen Variabeln und noch andere Werthe derselben jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, und für welche gleichzeitig dieselbe Gleichung (B.) erfüllt ist, so folgt allgemein der Satz:

I. Ist $p = 1$, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Es sei endlich

$$p = 0.$$

Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function s von η, ζ

$$s = \varphi(\eta, \zeta) \tag{10.}$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)}, \qquad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)}, \tag{11.}$$

wo $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades der Variabeln s ohne einen allen gemeinschaftlichen Theiler.

Ein beliebiger Umlauf der Variabeln z führe η, ζ resp. in η', ζ' über, so ist

$$\eta' = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\zeta}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta}, \qquad \zeta' = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\zeta}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta}. \tag{12.}$$

Setzt man in die aus (11.) sich ergebende Gleichung

$$s' = \varphi(\eta', \zeta'),$$

wo also s' den Werth bezeichnet, in welchen s durch den genannten Umlauf übergeht, die Werthe aus (12.) ein, so ergiebt sich nach Gl. (11.), dass s' eine rationale Function von s. Da aber auch umgekehrt s eine rationale Function von s' sein muss, so folgt:

Zwischen s und s' findet eine Gleichung der Form

$$ass' + bs + cs' + d = 0 \tag{13.}$$

statt, wo a, b, c, d Constanten sind.

Wir setzen

$$\xi_1^2 = \frac{dz}{ds}, \qquad \xi_2 = \xi_1 s. \tag{14.}$$

Aus Gl. (13.) folgt: [359

$$\frac{ds'}{dz} = \frac{bc - ad}{(as + c)^2} \frac{ds}{dz}. \tag{15.}$$

Da s nicht constant, so ist $bc - ad$ von Null verschieden.

Nach dem genannten Umlaufe von z mögen ξ_1, ξ_2 resp. in ξ_1', ξ_2' übergehen, so ergiebt sich aus (14.) und (15.)

$$\xi_1'^2 = \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{bc-ad}(as+c)^2\xi_1^2,$$

$$\xi_2'^2 = \frac{1}{bc-ad}(bs+d)^2\xi_1^2,$$

also

$$(16.)\qquad \begin{cases} \xi_1' = \dfrac{1}{\sqrt{bc-ad}}(a\xi_2+c\xi_1), \\ \xi_2' = \dfrac{1}{\sqrt{bc-ad}}(b\xi_2+d\xi_1). \end{cases}$$

Da aber s, folglich auch ξ_1, ξ_2 algebraische Functionen von z sind, so lässt sich dieses Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Es ist s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei

$$(17.)\qquad f_\varkappa(s)\xi_1^n = \psi_\varkappa(\xi_1, \xi_2), \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

wo $\psi_\varkappa$ ganze rationale und homogene Functionen von ξ_1, ξ_2 n^{ten} Grades bedeuten.

Aus den Gleichungen (11.) folgt alsdann

$$(18.)\qquad y_\varkappa = \varrho\psi_\varkappa(\xi_1, \xi_2), \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

Wenn $\varrho, \xi_1, \xi_2, y_\varkappa$ nach einem Umlaufe von z resp. in $\varrho', \xi_1', \xi_2', y_\varkappa'$ übergehen, so dass

$$y_\varkappa' = \alpha_{\varkappa 1}y_1 + \alpha_{\varkappa 2}y_2 + \alpha_{\varkappa 3}y_3, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

und nach Gl. (16.)

$$\psi_\varkappa(\xi_1', \xi_2') = \chi_\varkappa(\xi_1, \xi_2),$$

360] wo $\chi_\varkappa$ ebenfalls eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 bezeichnet, so ergiebt sich aus (18.)

$$(19.)\qquad \varrho'\chi_\varkappa(\xi_1, \xi_2) = \varrho[\alpha_{\varkappa 1}\psi_1 + \alpha_{\varkappa 2}\psi_2 + \alpha_{\varkappa 3}\psi_3].$$

Demnach ist $\frac{\varrho'}{\varrho}$ eine rationale Function von s.

Wenn die Function $\frac{\varrho'}{\varrho}$ für einen Werth von s verschwindet, so muss für denselben Werth

$$\alpha_{\varkappa 1}f_1 + \alpha_{\varkappa 2}f_2 + \alpha_{\varkappa 3}f_3 = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

sein, d. h. da die Determinante der Grössen a_{ik} nicht verschwindet,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

sein, was nicht möglich ist, da $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Demnach in $\frac{\varrho'}{\varrho}$ eine Constante. Da aber ϱ eine algebraische Function von z ist, so folgt, dass ϱ Wurzel einer rationalen Function von z. Also

II. Im Falle $p = 0$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (A.) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten darstellbar*).

Betrachten wir nunmehr die Gl. (B.) für den Fall $n = 2$.

Es sei

$$(20.) \qquad a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + 2a_{23} y_2 y_3 = 0$$

diese Gleichung, so ergiebt sich, wenn man mit η_0, ζ_0 ein beliebiges Werthsystem von η, ζ bezeichnet, welches derselben genügt, und wenn man setzt

$$(21.) \qquad s = \frac{\zeta - \zeta_0}{\eta - \eta_0},$$

$$(22.) \qquad \eta = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}, \qquad \zeta = \frac{b_0' + b_1' s + b_2' s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}.$$

Aus den Gln. (21.), (22.) ergiebt sich analog wie aus den Gln. (10.), (11.), [361 dass zwischen zwei Zweigen s und s' der Function s von z eine bilineare Gleichung von der Form (13.) stattfindet.

Aus dieser Gleichung folgert man wie oben, dass s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten ist, jedoch mit dem Unterschiede, dass hier die Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht algebraisch integrirbar zu sein braucht, da s nicht algebraisch sein muss. Auch

*) Über solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vergl. meine Abhandlungen in Borch. Journ. Bd. 81, S. 97 und Bd. 85, S. 1[1]).

[1]) Abh. XX, S. 11 und Abh. XXV, S. 115 dieses Bandes. Sch.

für diesen Fall gelten die Gln. (18.), und in diesen sind die Functionen ψ_x ganze rationale Functionen zweiten Grades, während ϱ constant wird. Dieses Resultat ist mit dem in No. 2 gegebenen übereinstimmend.

7.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A.), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B.) besteht, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Resultate:

I. Ist der Grad n der Gleichung (B.) gleich Zwei, so ist die Gleichung (A.) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist n grösser als Zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A.) algebraische Functionen von z.

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Klasse p der algebraischen Gleichung (B.) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A.) genügt, nicht grösser als Vier.

b) Ist p gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln Zwei, Drei, Vier oder Sechs.

c) Ist p gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A.) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze und homogene Functionen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems 362] von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraisch integrirbare Gleichung (A.) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B.) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt.

Heidelberg 1882.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 306, Fussnote p. 130 statt p. 128,

„ 307, Gl. (28.) $(z-b)^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}$ statt $(z-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha}}$,

$(\eta-\beta)^{\frac{\alpha}{\delta_1}}$ statt $(\eta-\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}}$,

„ „ , Zeile 13 δ statt β,

„ 309, „ 8 dann statt so,

„ „ , Gl. (5.) $\alpha_{1s}y_s$, statt $\alpha_{1s}y_s+$,

„ 311, Zeile 3 v. u. Functionen statt Function,

„ 319, „ 10 (10.) statt (12.),

„ 322, „ 11 v. u. der statt vom,

„ „ , „ 3 v. u. Es sei statt Ist,

„ 325, Gl. (9.) $\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}\,dz$ statt $\sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}$,

„ 326, Zeile 2 $\pm c_1 y_2' dy_3'$ statt $c_1 y_2' dy_3'$,

„ 327, „ 3 v. u. U von z statt von U,

„ 330, „ 3 keine statt keiner, einer statt einem;

„ „ wurde das Formelzeichen (E.) auf beide Ungleichungen bezogen,

„ 336, Zeile 12 v. u. wurde ϱ, ξ_1, ϱ_3, $y_\varkappa$ umgestellt,

„ „ , letzte Zeile, wurde vor $\varkappa = 1, 2, 3$ ein »für« unterdrückt.

2) Dem Schlusse auf S. 307, Zeile 9–21 liegt die wesentliche Voraussetzung zu Grunde, dass $\frac{\eta'}{\eta}$ der Quotient zweier Integrale der Differentialgleichung (1.) ist; wäre für η als Function von z nichts weiter bekannt als die Gln. (23.), (27.), so könnte man nicht schliessen, dass z eine algebraische Function von η sei, sondern es könnte, wenn der Rang der zwischen $\frac{d\eta}{dz}$ und η bestehenden algebraischen Gleichung gleich 0 oder 1 wäre, z auch eine transcendente Function von η sein (vergl. FUCHS, Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, 1884, Abh. XLIII dieses Bandes, und POINCARÉ, Sur un théorème de M. FUCHS, Acta Mathem. Bd. VII, 1885, S. 1 ff.). In einer späteren Arbeit, »Über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen«, Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie, 1890, S. 469 ff., hat FUCHS für den in Rede stehenden Nachweis zwei andere, auf verschiedenen Principien beruhende Verfahrungsarten entwickelt. SCH.

XLI.

ÜBER FUNCTIONEN EINER BELIEBIGEN ANZAHL UNABHÄNGIGER VARIABELN, WELCHE DURCH UMKEHRUNG DER INTEGRALE EINER GLEICH GROSSEN ANZAHL GEGEBENER FUNCTIONEN ENTSTEHEN.

(Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883, XX, S. 507—516; vorgelegt am 5. April; ausgegeben am 26. April 1883.)

In früheren Arbeiten*) habe ich mich mit den Bedingungen be- [507
schäftigt, dass die Gleichungen

$$\int_{\delta_1}^{z_1} f_1(z_1)\,dz_1 + \int_{\delta_2}^{z_2} f_1(z_2)\,dz_2 = u_1,$$

$$\int_{\delta_1}^{z_1} f_2(z_1)\,dz_1 + \int_{\delta_2}^{z_2} f_2(z_2)\,dz_2 = u_2$$

eindeutig lösbar seien. Es ergaben sich ausser den Bedingungen, welche das Verhalten von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Umgebung von singulären Stellen der Variabeln z und der Integrale dieser Functionen in Bezug auf unendlich oft wiederholte Umläufe betreffen, die beiden Bedingungen, dass $f_1(z), f_2(z)$ nicht gleichzeitig für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden dürfen, und dass die Gleichung

$$A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) = 0$$

für nicht mehr als zwei Werthsysteme $(z, f_k(z))$ befriedigt werden darf, und

*) Vergl. insbesondere Abhandlungen der Göttinger Societät, 8. Januar 1881[1]), welche Abhandlung auch im Bulletin des Herrn DARBOUX, Jahrgang 1881, wiedergegeben ist.

[1]) Abh. XXXV, S. 289 ff. dieses Bandes. Sch.

dass diese Lösungen den Gleichungen

$$\sum_1^2{}_i f_k(z_i)\,dz_i = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

Genüge leisten.

508] Im Folgenden erlaube ich mir mit Hülfe der in meinen genannten Arbeiten angewendeten Principien die Verallgemeinerung dieser letzteren Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen

$$\sum_1^n{}_i \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\,dz_i = u_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wenn n einen beliebigen Werth hat, zu liefern, indem ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalte, auf die Zusammenstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichungen in dem allgemeinen Falle überhaupt — in Übereinstimmung mit den Methoden meiner oben citirten Arbeiten — näher einzugehen.

1.

Es seien $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ Functionen der Beschaffenheit, dass jede symmetrische Function der den Gleichungen:

$$\text{(A.)} \qquad \sum_1^n \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\,dz_i = u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügenden Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine eindeutige Function der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ darstelle. Die Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ bedeuten willkürlich gegebene Constanten, und es wird vorausgesetzt, dass in jeder der n Gleichungen das auf dieselbe Variable z_i bezügliche Integral auf demselben Wege ausgeführt werde.

Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gegebene Werthe von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zugehörige Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Wir wollen voraussetzen, dass $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nicht zu den singulären Werthen einer der Functionen $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ gehören. Alsdann ergiebt sich aus den Gleichungen (A.) nach dem Taylorschen Satz:

$$\text{(1.)} \quad \sum_1^n{}_i f_k(c_i)(z_i - c_i) + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i f_k'(c_i)(z_i - c_i)^2 + \frac{1}{6}\sum_1^n{}_i f_k^{(2)}(c_i)(z_i - c_i)^3 + \cdots = u_k - v_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo

$$f_k^{(\lambda)}(z) = \frac{d^\lambda f_k(z)}{dz^\lambda}.$$

Wenn die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so beschaffen sind, dass die Determinante

$$D = \sum \pm f_1(c_1) f_2(c_2) \ldots f_n(c_n)$$

nicht verschwindet, alsdann ergeben sich aus den Gleichungen (1.)*) für [509 $z_1 - c_1, z_2 - c_2, \ldots, z_n - c_n$ Darstellungen durch Reihen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n$ entwickelt sind. Demnach sind in diesem Falle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Umgebung der Werthe $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eindeutig.

Setzen wir dagegen voraus, dass $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so beschaffen sind, dass

(B.) $$D = 0$$

ohne dass jedoch die Unterdeterminanten erster Ordnung Null sind, alsdann kann man z. B. aus den ersten $n-1$ Gleichungen (1.) $z_2 - c_2, z_3 - c_3, \ldots, z_n - c_n$ durch Reihen darstellen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $z_1 - c_1, u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_{n-1} - v_{n-1}$ fortschreiten.

Bezeichnen wir die mit $f_k(c_i)$ multiplicirte Unterdeterminante von D mit $\mathfrak{A}_{ki}$, so ist

$$(2.)\quad \mathfrak{A}_{n1}(z_i - c_i) = \mathfrak{A}_{ni}(z_1 - c_1) + \alpha_{i1}(u_1 - v_1) + \alpha_{i2}(u_2 - v_2) + \cdots + \alpha_{i,n-1}(u_{n-1} - v_{n-1}) + P_{i2} + P_{i3} + \cdots, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

wo P_{il} eine homogene Function l^{ter} Ordnung der Variabeln

$$z_1 - c_1,\ u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ \ldots,\ u_{n-1} - v_{n-1}$$

bezeichnet, und wo die α_{il} Unterdeterminanten der Determinante $\mathfrak{A}_{n1}$ darstellen.

Setzt man die Werthe (2.) in die n^{te} der Gleichungen (1.), so erhält man gemäss Gleichung (B.)

$$(C.)\quad \mathfrak{A}_{11}(u_1 - v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2 - v_2) + \cdots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n - v_n) = \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3 + \cdots,$$

wo $\mathfrak{Q}_l$ eine ganze homogene Function von $z_1 - c_1, u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_{n-1} - v_{n-1}$ l^{ter} Ordnung bezeichnet.

Wenn nicht alle Glieder der unendlichen Reihe $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ für $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_{n-1} = v_{n-1}$ und für einen beliebigen Werth von z_1 verschwinden, so sei unter den von $u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_{n-1} - v_{n-1}$ unabhängigen Gliedern $C_m(z_1 - c_1)^m$ das von der niedrigsten Ordnung. Alsdann würden sich

*) Vergl. JACOBI in CRELLES Journal Bd. 6, S. 274[1]).

[1]) Jacobis Werke, Bd. 6 (1891), S. 47. Sch.

aus der Gleichung (C.) für willkürliche Werthe von $u_1-v_1, u_2-v_2, \ldots, u_n-v_n$, deren Modul hinlänglich klein, m Werthe von z_1-c_1 ergeben, deren Moduln ebenfalls unterhalb einer gewissen Grenze bleiben*). Es würde sich demnach 510] in der Umgebung von $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$ nicht jede symmetrische Function von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eindeutig verhalten, und zwar würden $u_k = v_k$ wirkliche singuläre Stellen derselben sein, weil, wenn u_k auf willkürlichem Wege in v_k einrückt, gleichzeitig $z_i = c_i$ wird.

Wenn dagegen keines der Glieder $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ ein von u_k-v_k unabhängiges Glied enthält, so wird der Gleichung (C.) gemäss, wenn die u_k-v_k unendlich klein erster Ordnung werden, der Ausdruck

$$\mathfrak{A}_{11}(u_1-v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2-v_2) + \cdots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n-v_n)$$

unendlich klein zweiter Ordnung sein, d. h. es würde zwischen diesen unendlich kleinen Grössen die Gleichung

$$\mathfrak{A}_{11}(u_1-v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2-v_2) + \cdots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n-v_n) = 0 \tag{3.}$$

stattfinden.

Demnach würden**) die z_i nur dann in die c_i eintreffen können, wenn die letzten Wegelemente, auf welchen u_k nach v_k gelangt, von einander abhängig werden, also $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nicht mehr als von einander unabhängige Variabeln sich verhalten.

Wenn die Grössen $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ kein von u_k-v_k unabhängiges Glied enthalten, so wird die Gleichung (C.) für beliebige Werthe z_1 befriedigt, wenn

*) Dieses ergiebt sich am einfachsten aus einem Satze, welchen Herr WEIERSTRASS in einem lithographirten Hefte, betitelt: »Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, zusammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin übergeben. Berlin, H. S. Hermann«, S. 1–6[1]), bewiesen hat. Dieser Satz des Herrn WEIERSTRASS lässt sich kurz dahin aussprechen: Eine nach ganzen positiven Potenzen der $n+1$ Variablen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe 510] $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von der Beschaffenheit, dass $F(x, 0, \ldots, 0) = F_0(x)$ nicht für jeden Werth von x verschwindet, und zwar so, dass die niedrigste in $F_0(x)$ auftretende Potenz von x die m^{te} sei, lässt sich für hinlänglich kleine Moduln der Variablen in ein Product zweier Factoren zerlegen, wovon der eine für verschwindende Werthe der Variablen weder Null noch unendlich wird, der andere aber die Form hat $x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m$, wo f_k eine nach ganzen positiven Potenzen der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe darstellt.

**) Vergl. meine citirte Abhandlung in den Abh. der Göttinger Societät[2]), No. 4.

[1]) Weierstrass' Werke, Bd. II (1895), S. 135 ff. Sch.

[2]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

$u_k = v_k$, oder, was dasselbe ist, wenn man in den Gleichungen (1.) $u_k = v_k$ setzt, so werden dieselben identisch für die Variable z_1 befriedigt, wenn man für $z_i - c_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ die nach Potenzen von $z_1 - c_1$ fortschreitenden Reihen (2.) substituirt.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der Umgebung von $u_k = v_k$, welchen die Werthe $z_i = c_i$ entsprechen, für die $D = 0$, jede symmetrische Function von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sich eindeutig verhalte, ist also die, dass die Integrale von $n-1$ der Differentialgleichungen

$$\text{(D.)} \qquad \sum_1^n{}_i f_k(z_i)\, dz_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Anfangswerthen $z_i = c_i$ auch der n^{ten} dieser Differentialgleichungen genügen.

2. [511

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ Functionen einer Variabeln ζ, welche die gleichzeitigen Werthe $z_i = c_i$ erhalten und den Differentialgleichungen (D.) genügen, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\text{(1.)} \qquad \sum_1^n{}_i f_k(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0 = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{(2.)} \qquad \sum_1^n{}_i f_k'(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0^2 + \sum_1^n{}_i f_k(c_i)\left(\frac{d^2 z_i}{d\zeta^2}\right)_0 = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0, \left(\frac{d^2 z_i}{d\zeta^2}\right)_0$ die Werthe von $\frac{dz_i}{d\zeta}, \frac{d^2 z_i}{d\zeta^2}$ für die Anfangswerthe $z_i = c_i$ bezeichnen.

Vermöge der Gleichung (B.) werden die Gleichungen (1) gleichzeitig befriedigt, und man erhält

$$\text{(3.)} \qquad \left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0 = \varrho\, \mathfrak{A}_{mi},$$

wo m eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeutet und ϱ von i unabhängig ist.

Multiplicirt man die Gleichungen (2.) der Reihe nach mit $\mathfrak{A}_{l1}, \mathfrak{A}_{l2}, \ldots, \mathfrak{A}_{ln}$ und addirt dieselben, so ergiebt sich aus Gleichung (B.)

$$\text{(4.)} \qquad \sum_1^n{}_k \sum_1^n{}_i \mathfrak{A}_{kl} f_k'(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0^2 = 0,$$

wo für l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gewählt werden kann.

Substituirt man die Werthe (3.) in (4.), so folgt

$$\sum_{k}^{n}\sum_{i}^{n}\mathfrak{A}_{ki}f_k'(c_i)\mathfrak{A}_{mi}^{2} = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die aus (B.) sich ergebende Eigenschaft

$$\frac{\mathfrak{A}_{mi}}{\mathfrak{A}_{mk}} = \frac{\mathfrak{A}_{m'i}}{\mathfrak{A}_{m'k}},$$

$$\text{(5.)} \qquad \mathfrak{A}_{m1}\frac{\partial D}{\partial c_1} + \mathfrak{A}_{m2}\frac{\partial D}{\partial c_2} + \cdots + \mathfrak{A}_{mn}\frac{\partial D}{\partial c_n} = 0.$$

Die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ waren willkürlich und nur durch die Gleichung (B.) verbunden. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ beliebige Variabeln, welche nur durch die Gleichung

$$\text{(E.)} \qquad \Delta = \sum \pm f_1(z_1)f_2(z_2)\ldots f_n(z_n) = 0$$

512] mit einander verbunden sind, so ist unter Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (A.)

$$\text{(F.)} \qquad A_{m1}\frac{\partial \Delta}{\partial z_1} + A_{m2}\frac{\partial \Delta}{\partial z_2} + \cdots + A_{mn}\frac{\partial \Delta}{\partial z_n} = 0,$$

wo A_{ki} den Coefficienten von $f_k(z)$ in Δ bedeutet und m irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet.

3.

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-2}$ Werthe, welche sämmtlich der Gleichung

$$\text{(G.)} \qquad A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) + \cdots + A_n f_n(z) = 0$$

genügen, wo A_k eine willkürliche Grösse bezeichnet.

Ist $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ irgend eine Combination von n Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, 2n-2$, so ist

$$\text{(E'.)} \qquad \Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu) = \begin{vmatrix} f_1(z_\alpha) & f_1(z_\beta) & \cdots & f_1(z_\nu) \\ f_2(z_\alpha) & f_2(z_\beta) & \cdots & f_2(z_\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(z_\alpha) & f_n(z_\beta) & \cdots & f_n(z_\nu) \end{vmatrix} = 0.$$

Solcher Gleichungen erhält man demgemäss

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n-2}.$$

Zu jeder derselben gehört nach dem Satze voriger Nummer eine Gleichung der Form

$$(F'.) \qquad \begin{aligned} &A_{m\alpha}(\alpha,\beta,\ldots,\nu)\frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z_\alpha} \\ &+A_{m\beta}(\alpha,\beta,\ldots,\nu)\frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z_\beta}+\cdots \\ &+A_{m\nu}(\alpha,\beta,\ldots,\nu)\frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z_\nu}=0, \end{aligned}$$

wo $A_{mi}(\alpha,\beta,\ldots,\nu)$ den Coefficienten von $f_m(z_i)$ in $\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)$ bezeichnet.

Von den $2n-2$ Werthsystemen $(z_i, f_k(z_i))$ können $n-1$ beliebig gewählt werden, während die übrigen $n-1$ dadurch bestimmt sind.

Wählen wir $(z_i, f_k(z_i))$ für $i=1,2,\ldots,n-1$ als die willkürlichen und bezeichnen der Kürze halber

$$\Delta(1,2,\ldots,n-1,\varrho) \text{ für } \varrho=n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-2 \qquad [513$$

mit Δ_ϱ und den Coefficienten von $f_k(z_i)$ in Δ_ϱ mit $A_{ki}(\varrho)$, so ist

$$(1.) \qquad \frac{\partial z_\varrho}{\partial z_i}\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_\varrho}+\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_i}=0, \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

$$(2.) \qquad \frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z}=0,$$

wenn $\alpha,\beta,\ldots,\nu$ von i verschieden sind, und

$$(2a.) \qquad \frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z_i}=\frac{A_{1i}(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{A_{1i}(n)}\frac{\partial\Delta_n}{\partial z_i},$$

wenn eine der Zahlen $\alpha,\beta,\ldots,\nu$ mit i übereinstimmt.

Ebenso ist

$$(3.) \qquad \frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z_\varrho}=0,$$

wenn $\alpha,\beta,\ldots,\nu$ von ϱ verschieden sind, aber

$$(3a.) \qquad \frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{\partial z_\varrho}=\frac{A_{1\varrho}(\alpha,\beta,\ldots,\nu)}{A_{1\varrho}(\varrho)}\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_\varrho},$$

wenn eine der Zahlen $\alpha,\beta,\ldots,\nu$ mit ϱ übereinstimmt.

Setzt man die Werthe (2.) bis (3a.) in (F'.) ein, so erhält man

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n-2}$$

lineare homogene Gleichungen zwischen den $2n-2$ Grössen

$$\frac{\partial\Delta_n}{\partial z_1}, \frac{\partial\Delta_n}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial\Delta_n}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial\Delta_n}{\partial z_n}, \frac{\partial\Delta_{n+1}}{\partial z_{n+1}}, \frac{\partial\Delta_{n+2}}{\partial z_{n+2}}, \ldots, \frac{\partial\Delta_{2n-2}}{\partial z_{2n-2}}.$$

Es bestimmen $2n-2$ derselben die Verhältnisse dieser Grössen, folglich nach den Gleichungen (2.) bis (3a.) die Verhältnisse irgend zweier Ableitungen der Determinanten $\Delta(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$, und zwar ergeben sich vermöge der zwischen den Grössen $A_{mi}(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ stattfindenden Relationen die Gleichungen

$$\text{(H.)} \quad A_{mi}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2)\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_i} + A_{m\varrho}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2)\frac{\partial\Delta_\varrho}{\partial z_\varrho} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1,\ \varrho = n, n+1, \ldots, 2n-2).$$

514] Demnach folgt aus den Gleichungen (1.)

$$\text{(4.)} \quad \frac{\partial z_\varrho}{\partial z_i} A_{mi}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2) - A_{m\varrho}(i, n, n+1, \ldots, 2n-2) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

Wenn die Gleichungen (A.) eindeutig lösbar sind, so finden zwischen den Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-2}$, welche der Gleichung (G.) genügen, die n Differentialgleichungen

$$\text{(J.)} \quad \sum_1^{2n-2} f_k(z_i)\, dz_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

statt.

Man sieht, dass für unsere Functionen $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ ein ähnliches Theorem besteht, wie für die Differentialquotienten der Integrale erster Gattung der algebraischen Functionen. Es ist bemerkenswerth, dass wir dieses Theorem in unserem allgemeinen Falle aus der Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (A.) direct herleiten konnten. Selbstverständlich gilt unsere Deduction auch für den speciellen Fall des Theorems bezüglich der ABELschen Integrale, welcher in der Theorie der ABELschen Functionen mit Hülfe des ABELschen Theorems hergeleitet wird*).

*) Vergl. RIEMANN, Theorie der ABELschen Functionen, in BORCHARDTS Journal, Bd. 54[1]), No. 14.

1) Riemanns Werke (1892), Abh. VI, S. 100 ff. Sch.

4.

In gleicher Weise, wie ich es für den besonderen Fall $n = 2$ bewiesen habe*), gilt hier der Satz:

I. Damit die Gleichungen (A.) eindeutig lösbar seien, dürfen nicht $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ gleichzeitig für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden.

Dieses vorausgesetzt, folgern wir aus dem Vorhergehenden den Satz:

II. Die Gleichung (G.) wird durch nicht mehr als $2n-2$ Werthsysteme $(z_i, f_k(z_i))$ mit endlichem z_i befriedigt.

Denn genügt ausser den Werthsystemen $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$ noch $z = z^1$, $f_k(z) = f_k(z^1)$, so hat man nach dem Satze der vorigen Nummer (Gleichung (J.))

$$\sum_1^{2n-2} f_k(z_i)\, dz = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad [515$$

(1.)

und

$$\sum_1^{2n-2} f_k(z_i)\, dz - f_k(z_\alpha)\, dz_\alpha + f_k(z^1)\, dz^1 = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(2.)

wo α eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n-2$ bedeutet.

Durch Subtraction von (1.) und (2.) ergiebt sich

$$f_k(z^1)\, dz^1 - f_k(z_\alpha)\, dz_\alpha = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(3.)

Da $n-1$ von den Grössen z willkürlich gewählt werden können, so seien z. B. $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ willkürlich veränderlich. Aus (3.) folgt z. B. successive für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$

$$f_k(z_1)\, dz_1 = f_k(z_2)\, dz_2, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(4.)

woraus sich die Gleichungen

$$\frac{f_k(z_1)}{f_1(z_1)} = \frac{f_k(z_2)}{f_1(z_2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(5.)

ergeben würden, welche nicht Statt haben können, da z_1, z_2 von einander unabhängig sind.

Es ist ausserdem dem Satze I. zu Folge nicht möglich, dass die Gleichung (G.) durch einen constanten, d. h. von $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ unabhängigen endlichen

*) S. z. B. meine erwähnte Arbeit in den Abhandlungen der Gött. Societät, 8. Jan. 1881 [1]), No. 3.

[1]) Abh. XXXV, S. 289 ff. dieses Bandes. Sch.

Werth $z = b$ befriedigt werde, da dieses nur geschehen könnte, wenn (G.) für willkürliche Werthe von $A_1, A_2, \ldots, A_n$, durch $z = b$ befriedigt würde, oder dass $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ gleichzeitig für $z = b$ verschwinden würden.

5.

Sind $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n-2}$ unabhängige Variabeln, und bestimmt man die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ so, dass die Werthsysteme $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = n, n+1, \ldots, 2n-2$ der Gleichung (G.) genügen, so sind die übrigen Werthsysteme $(z_i, f_k(z_i))$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, welche (G.) genügen, Functionen von $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n-2}$, und es finden zwischen $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-2}$ die Gleichungen (J.) statt.

Sind insbesondere $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{2n-2}$ Constanten, und zwar $z_{n+i} = \gamma_i$, so werden $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ Functionen von z_n, welche den Differentialgleichungen (D.) genügen. Hieraus folgt:

I. Das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (D.) ist durch die Wurzeln der Gleichung

516]

$$(K.) \qquad \begin{vmatrix} f_1(z) & f_1(z_n) & f_1(\gamma_1) & \cdots & f_1(\gamma_{n-2}) \\ f_2(z) & f_2(z_n) & f_2(\gamma_1) & \cdots & f_2(\gamma_{n-2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(z) & f_n(z_n) & f_n(\gamma_1) & \cdots & f_n(\gamma_{n-2}) \end{vmatrix} = 0$$

mit der Unbekannten z dargestellt, in welcher $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-2}$ willkürliche Constanten bedeuten.

Aus der vorigen Nummer ergiebt sich:

II. Die Gleichung (K.) wird durch nicht mehr als $n-1$ Werthenpaare $(z, f_k(z))$ (Functionen von $z_n, f_k(z_n)$) befriedigt.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

S. 345, Gl. (2.) wurde »= 0« hinzugefügt,

„ 350, „ (K.) und Zeile 5 v. u. wurde γ_{n-2} statt γ_{n-1} gesetzt. SCH.

XLII.

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE. PAR CH. HERMITE ET L. FUCHS.

(Acta Mathematica, t. 4, 1884, p. 89—92.)

---

1. Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE par M. FUCHS. [89

Peut-être vous intéressera-t-il de voir la manière dont je me suis démontré votre théorème ainsi énoncé:

»Soit α et β deux exposants dont la somme $\alpha+\beta=k$, k étant entier et positif, et $\frac{B}{A}$ la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$. Les polynômes A et B, des degrés n et $n+k$, se déterminent, sauf un facteur constant, en posant:

$$\text{(I.)} \qquad D_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}A,$$

$$\text{(II.)} \qquad D_x^{n+k}[(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta}] = (x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}B\epsilon.$$

D'abord comme on peut changer l'expression $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$ au moyen d'une substitution linéaire et entière en $t^{\alpha}(1-t)^{\beta}$, je considère immédiatement une telle expression, ou plutôt $x^{\lambda}(1-x)^{\mu}$, en mettant λ et μ au lieu de α et β.

Je me restreindrai à la démonstration de la formule (I.), parce qu'on peut procéder de la même manière pour prouver la seconde.

Il suit d'une formule donnée par JACOBI, dans un mémoire posthume [90 (Journal de BORCHARDT t. 56, p. 149[1]), § 3), que l'on a l'équation:

$$\text{(1.)} \quad D_x^n[x^{n+\lambda}(1-x)^{n+\mu}] = (1+\lambda)(2+\lambda)\ldots(n+\lambda)x^{\lambda}(1-x)^{\mu}F(-n, k+n+1, 1+\lambda, x).$$

---

1) Jacobi, Werke, t. VI (1891), p. 144 et suiv. Sch.

Or on peut poser:

$$(2.) \qquad x^\lambda(1-x)^\mu = G_k(x) \pm \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)}{1.2\dots k} F\left(\lambda, 1, 1+k, \frac{1}{x}\right),$$

$G_k(x)$ étant un polynôme entier du degré k. En développant

$$F\left(\lambda, 1, k+1, \frac{1}{x}\right)$$

en fraction continue, on voit que le dénominateur de la réduite d'ordre n est identique à la quantité A (sauf un facteur constant), et l'on déduit des formules de HEINE (Journal de BORCHARDT, t. 57, p. 231, et aussi Handbuch der Kugelfunctionen, t. I, chap. V), sauf un facteur constant:

$$(3.) \qquad A = F(-n, k+n+1, 1+\lambda, x).$$

On peut donc substituer dans l'équation (1.) à la fonction

$$F(-n, k+n+1, 1+\lambda, x),$$

la quantité A, ce qui démontre la première de vos deux formules.

Heidelberg, 17. Octobre 1883.

91] 2. Extrait d'une lettre adressée à M. FUCHS par M. HERMITE.

... Je me permets maintenant de vous communiquer une autre manière de parvenir au résultat que vous avez établi. Sous ce nouveau point de vue, je puis supposer k indifféremment positif ou négatif, j'admettrai seulement lorsque le second cas se présente que $n+k$ soit positif. Cela étant, je pose, en développant suivant les puissances descendantes de la variable:

$$(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta} = P + \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon'}{x^2} + \cdots,$$

P désignant la partie entière, et je prends les dérivées d'ordre n des deux membres de cette égalité.

J'obtiens ainsi

$$D_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}A = D_x^n P + \frac{\eta}{x^{n+1}} + \frac{\eta'}{x^{n+2}} + \cdots,$$

et cette relation met immédiatement en évidence que $\frac{D_x^n P}{A}$ est la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la quantité

$$(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta},$$

le numérateur étant du degré $n+k$, et le dénominateur du degré n.

On parvient à la même réduite, si l'on part de l'égalité suivante:

$$(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta} = Q + \frac{\zeta}{x} + \frac{\zeta'}{x^2} + \cdots,$$

où la partie entière Q est du degré $2n+k$.

En prenant en effet la dérivée d'ordre $n+k$ des deux membres, nous trouvons:

$$(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}B = D_x^{n+k}Q + \frac{\vartheta}{x^{n+k+1}} + \frac{\vartheta'}{x^{n+k+2}} + \cdots,$$

et comme tout à l'heure on en conclut que $\frac{D_x^{n+k}Q}{B}$ est une réduite du [92 développement de $(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}$.

La fraction inverse $\frac{B}{D_x^{n+k}Q}$ est par conséquent, d'après le degré de son dénominateur, la réduite d'ordre n de la quantité $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$, et vous voyez que vous pouvez écrire, sauf un facteur constant:

$$B = D_x^n P, \quad D_x^{n+k}Q = A.$$

Ces relations mettent en évidence une liaison bien singulière, et que jusqu'ici je n'ai point cherché à approfondir, entre P, Q, A et B; je me contenterai d'avoir établi par la première le résultat que j'avais en vue.

Paris, 1. Février 1884.

XLIII.

ÜBER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, DEREN INTEGRALE FESTE VERZWEIGUNGSPUNKTE BESITZEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, XXXII, S. 699—710; vorgetragen am 26. Juni; ausgegeben am 3. Juli 1884.)

Ist eine Differentialgleichung gegeben, so kann man nach einem be- [699
kannten Satze von CAUCHY ein und nur ein Integral finden von der Beschaffenheit, dass für einen willkürlich angenommenen Werth z_0 der unabhängigen Variabeln z das Integral y und seine $n-1$ ersten Ableitungen $y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}$ willkürlich vorgeschriebene Werthe

$$y = \eta_0, \quad y' = \eta_1, \quad y^{(2)} = \eta_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = \eta_{n-1}$$

erhalten, wenn zugleich festgesetzt wird, welchen von den aus der Differentialgleichung sich ergebenden diesen Werthen zugehörigen Werthen der n^{ten} Ableitung $y^{(n)}$ man gewählt hat. Wir wollen der Kürze halber diese Bestimmungsstücke eines Integrals der Differentialgleichung nach der Analogie der in der Mechanik gebräuchlichen Bezeichnung die Anfangswerthe des Integrals nennen. Diejenigen Werthe von z, für welche sich das Integral y verzweigt, wollen wir als die Verzweigungspunkte desselben bezeichnen. Es ergiebt sich nun, dass im Allgemeinen diese Punkte in zwei Kategorien zerfallen, nämlich in solche, welche von den Anfangswerthen abhängen und sich mit der stetigen Änderung der letzteren stetig verschieben, und in solche, welche feste Lagen in der z-Ebene haben. Man kann es als eines der wesentlichsten Merkmale einer linearen Differentialgleichung bezeichnen, dass die Verzweigungs-

punkte ihrer Integrale sämmtlich zur zweiten Kategorie gehören, und eben diese Eigenschaft ist es, welche den Verlauf der Integrale bei den linearen Differentialgleichungen übersichtlicher macht als bei den nicht linearen. Ich habe mir daher die Aufgabe gestellt, diejenigen Differentialgleichungen überhaupt zu characterisiren, deren Integrale nur Verzweigungspunkte der zweiten Kategorie besitzen. Im Folgenden erlaube ich mir, die Resultate meiner Untersuchung zunächst für den Fall der Differentialgleichungen erster Ordnung zu entwickeln. Aber man wird aus der Darstellung erkennen, dass im Wesentlichen dieselbe Methode für die Differentialgleichungen höherer Ordnung ihre Gültigkeit behält.

700] Eine weitere Eigenschaft der linearen Differentialgleichungen, welche sich aus dem Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes ergiebt, ist die, dass die Grössen, welche die Art der daselbst erfolgenden Verzweigung des Integrals bestimmen, ebenfalls von den Anfangswerthen desselben unabhängig sind, in dem Sinne, dass jene Grössen sich nicht stetig mit diesen Anfangswerthen ändern. Um daher diejenigen Klassen von Differentialgleichungen zu finden, welche den linearen Differentialgleichungen am nächsten stehen, muss die Aufgabe behandelt werden: Es soll angegeben werden, welche unter den Differentialgleichungen mit nicht verschiebbaren Verzweigungspunkten der Integrale die Eigenschaft haben, dass auch die Grössen, welche die Art der in festen Punkten stattfindenden Verzweigungen der Integrale bestimmen, sich nicht mit den Anfangswerthen derselben stetig ändern. Die Resultate der auf diese Aufgabe gerichteten Untersuchung hoffe ich bei anderer Gelegenheit vorlegen zu können.

1.

Es seien drei Grössen x, y, z durch eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1.}$$

mit einander verbunden von der Beschaffenheit, dass F eine ganze rationale Function von y und z mit von x abhängigen Coefficienten darstellt. Ferner sei $D(x, y)$ die Discriminante der algebraischen Function z von y, so dass also

$$D(x, y) = 0 \tag{2.}$$

die Resultante der Elimination von z zwischen Gleichung (1.) und der

Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{3.}$$

ist. Bedeutet $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung (2.), $z = \zeta$ eine den Gleichungen (1.) und (3.) gemeinschaftliche Wurzel, wenn in denselben y durch η ersetzt wird, und substituirt man in (1.)

$$\begin{cases} y = \eta + u, \\ z = \zeta + v, \end{cases} \tag{4.}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$F_1(x, u, v) = 0, \tag{5.}$$

wo F_1 eine ganze rationale Function von u und v mit von x abhängenden Coefficienten darstellt.

Es sei B ein Gebiet der x-Ebene, innerhalb dessen η und ζ überall [701 eindeutig und stetig verlaufen und der Modul der Differenz zwischen η und einer von η im Allgemeinen verschiedenen Wurzel der Gleichung (2.) nirgends unterhalb eine gewisse Grenze herabsinkt, so ist für alle Werthe von x dieses Gebietes und für alle Werthe von u innerhalb eines hinlänglich kleinen in der u-Ebene um $u = 0$ beschriebenen Kreises K die Discriminante $D_1(x, u)$ von $F_1(x, u, v)$ mit Ausnahme des Mittelpunktes dieses Kreises von Null verschieden; für $u = 0$ aber ist $D_1(x, u)$ Null für jedes x des Gebietes B. Jede Wurzel v der Gleichung (5.) lässt sich für alle Werthe x des Gebietes B und die Werthe u des Gebietes K in der Form

$$v = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \cdots \tag{6.}$$

darstellen, worin k eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null, α eine positive ganze Zahl bedeutet, und worin $g_0, g_1, g_2, \ldots$ innerhalb B stetige und eindeutige Functionen von x sind, welche demnach innerhalb eines um einen Punkt a des Gebietes B beschriebenen ganz in dieses Gebiet fallenden Kreises nach positiven ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelt werden können.

2.

Wenn die Verzweigungspunkte der Integrale einer Differentialgleichung sich mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschieben, so wird man

im Allgemeinen die letzteren so variiren können, dass jeder Punkt eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln Verzweigungspunkt wird.

Umgekehrt wenn die Verzweigungspunkte sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschieben sollen, so darf es nicht geschehen, dass man Integrale bestimmen könne, welche sich in einem beliebigen Punkte eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln verzweigen. Sind nämlich $a, a', a'', \ldots$ einander hinlänglich nahe gelegene Punkte eines solchen Gebietes, $J, J', J'', \ldots$ Integrale, welche sich bezüglich in $a, a', a'', \ldots$ derart verzweigen, dass für $J^{(k)}$ die in der Umgebung von $a^{(k)}$ gelegenen Punkte nicht Verzweigungspunkte sind, und setzt man jedes der Integrale $J, J', J'', \ldots$ bis zu ein und demselben Punkte P des Gebietes der unabhängigen Variabeln fort, wo die Integrale oder ihre Ableitungen nicht gleiche Werthe annehmen, — was immer möglich ist, da die Integrale nicht im ganzen Gebiete der unabhängigen 702] Variabeln identisch sind — so sind im Allgemeinen die Werthe der Integrale und ihrer Ableitungen in P beliebig wenig von einander verschieden; man könnte also dadurch, dass man in P als Ausgangspunkt die Anfangswerthe stetig ändert, die Verzweigungspunkte stetig verschieben (von a nach a' oder a'' etc.).

3.

Es sei

$$F(z, y, y') = 0 \tag{A.}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, wo F eine ganze rationale Function der abhängigen Variabeln y und ihrer ersten Ableitung y' nach der unabhängigen Variabeln z ist, deren Coefficienten von z abhängen. Wir können voraussetzen, dass F in dem Sinne irreductibel sei, dass dasselbe nicht in gleichbeschaffene Functionen niedrigeren Grades in Bezug auf y' zerlegbar ist.

Ein Integral y der Gleichung (A.) kann sich bekanntlich*) für einen Punkt $z = z_0$, in dessen Umgebung die Coefficienten der Gleichung (A.) eindeutig und stetig sind, nur dann verzweigen, wenn dem Integrale für $z = z_0$ ein Werth $y = y_0$ zukommt von der Beschaffenheit, dass die Wurzeln y' der

*) Vergl. BRIOT et BOUQUET, Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, p. 191.

Gleichung

$$F(z_0, y_0, y') = 0 \tag{1.}$$

vielfach oder auch unendlich gross werden.

Es sei demgemäss $D(z, y)$ die Discriminante der algebraischen Function y' von y, das heisst die Resultante der Elimination von y' zwischen der Gleichung (A.) und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{B.}$$

und es sei η eine Wurzel der Gleichung

$$D(z, y) = 0 \tag{C.}$$

und $y' = \zeta$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (A.) und (B.), wenn in denselben y durch η ersetzt wird.

Setzen wir in (A.)

$$\begin{cases} y = \eta + u, \\ y' = \zeta + v, \end{cases} \tag{2.}$$

wodurch wir

$$F_1(z, u, v) = 0 \tag{3.}$$

erhalten mögen, wo F_1 eine ganze rationale Function von u und v bedeutet mit von z abhängigen Coefficienten. Alsdann kann man nach No. 1 ein [703 Gebiet B für z und ein Gebiet K für u abgrenzen der Art, dass innerhalb des Gebietes B η und ζ eindeutig und stetig verlaufen, und dass jede Wurzel v der Gleichung (3.) für diese Werthe von z und u in der Form

$$v = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \cdots \tag{4.}$$

dargestellt wird, wo k eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, α eine positive ganze Zahl bedeutet, und $g_0, g_1, g_2, \ldots$ innerhalb eines um einen willkürlichen Punkt $z = z_0$ des Gebietes B beschriebenen ganz in dieses Gebiet hineinfallenden Kreises $\mathfrak{K}$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ entwickelbare Functionen von z sind.

Setzen wir

$$u = t^{\alpha}, \tag{5.}$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.) aus Gleichung (4.)

$$\alpha t^{\alpha-1}\frac{dt}{dz} = \zeta - \frac{d\eta}{dz} + g_0 t^k + g_1 t^{k+1} + \cdots \tag{6.}$$

In Folge der Voraussetzung, dass F irreductibel sei, ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dass $F_1(z,u,v)$ für beliebige z und u durch eine Potenz von v theilbar ist, es können deshalb in (4.) nicht alle Grössen g für jedes z verschwinden, und wenn, wie wir voraussetzen, die k^{te} Potenz von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ die niedrigste ist, so ist g_0 nicht identisch Null. Es sei demnach der willkürliche Punkt z_0 in B so gewählt, dass g_0 für $z = z_0$ von Null verschieden ist.

Es sei nun

1. $k < 0$,

so folgt aus Gleichung (6.), dass $\frac{dz}{dt}$ darstellbar ist in der Form

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon_0 t^{\alpha-1-k} + \varepsilon_1 t^{\alpha-k} + \varepsilon_2 t^{\alpha-k+1} + \cdots, \tag{7.}$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen bedeuten, die innerhalb eines gewissen z_0 umgebenden Kreises convergiren, und wovon überdies ε_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Da $\alpha - 1 - k > 0$, so ergiebt sich hieraus auf bekannte Weise

$$z - z_0 = c_0 t^{\alpha-k} + c_1 t^{\alpha-k+1} + \cdots, \tag{8.}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Constanten bedeuten. Da $\alpha - k > 1$, so ergiebt Gleichung (8.) durch Umkehrung, dass t, folglich auch u und demnach das Integral y sich in $z = z_0$ verzweigt.

704] I. Soll also der willkürliche Punkt $z = z_0$ nicht Verzweigungspunkt sein, so darf k nicht einen negativen Werth haben, d. h. die Gleichung (3.) darf für $u = 0$ nicht eine unendlich grosse Wurzel v besitzen.

Dagegen besitzt der Voraussetzung gemäss die Gleichung (3.) für $u = 0$ mehrere Wurzeln $v = 0$; für diese ist

2. $k > 0$.

Wenn nun nicht identisch

$$\zeta - \frac{d\eta}{dz} = 0, \tag{9.}$$

so sei der willkürliche Punkt z_0 so beschaffen, dass $\zeta - \frac{d\eta}{dz}$ für $z = z_0$ von Null

verschieden. Alsdann ergiebt sich aus (6.), dass $\frac{ds}{dt}$ sich in der Form

$$\frac{ds}{dt} = \varepsilon_0 t^{\alpha-1} + \varepsilon_1 t^{\alpha} + \varepsilon_2 t^{\alpha+1} + \cdots \tag{10.}$$

darstellen lässt, wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $s - s_0$ fortschreitende, innerhalb eines gewissen s_0 umgebenden Kreises convergirende Reihen sind, wovon ε_0 für $s = s_0$ nicht verschwindet. Aus (10.) ergiebt sich wieder auf bekannte Weise

$$s - s_0 = c_0 t^{\alpha} + c_1 t^{\alpha+1} + \cdots, \tag{11.}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ Constanten sind.

Ist nun $\alpha \geqq 2$, so ergäbe sich hieraus, dass t, folglich auch u und y sich in $s = s_0$ verzweigen würden. Wenn dieses also nicht statthaft sein soll, so muss zunächst Gleichung (9.) identisch erfüllt sein.

II. Ist also η eine Wurzel der Gleichung (C.) und so beschaffen, dass sich die algebraische Function y' von y für willkürliche s in $y = \eta$, $y' = \zeta$ verzweigt, so muss ζ mit der Ableitung von η übereinstimmen, d. h. η muss ein Integral der Gleichung (A.) sein.

Ist die Gleichung (9.) identisch erfüllt, so ergiebt sich für den Fall $\alpha - 1 - k > 0$ eine wie Gleichung (7.) beschaffene Gleichung, und daraus die Folgerung, dass y sich in $s = s_0$ verzweigen würde. Es muss also auch

$$k \geqq \alpha - 1 \tag{D.}$$

sein, in welchem Falle t entweder identisch Null oder in der Umgebung von s_0 eindeutig wird, d. h.

III. Wenn für die algebraische Function y' von y, für will- [705
kürliche s, $y = \eta$, $y' = \zeta$ eine $(\alpha-1)$-fache Verzweigungsstelle ist, so muss die Gleichung

$$F(s, y, \zeta) = 0 \tag{E.}$$

mit der Unbekannten y die Grösse η mindestens als $(\alpha-1)$-fache Wurzel besitzen.

Wenn die Gleichung (3.) ausser $v = 0$ für $u = 0$ noch nicht verschwindende Wurzeln v besitzt, so ist für diese der Fall

3. $k = 0$ zu betrachten.

Da Gleichung (9.) identisch erfüllt ist, so ergiebt sich aus (6.) eine Gleichung, welche (7.) analog ist, wenn in dieser $k = 0$ gesetzt wird, und es würde sich aus dieser ein in z_0 sich verzweigendes Integral y ergeben, wenn $\alpha \geqq 2$ wäre, d. h.

IV. Ist $y' = \zeta_1$ eine von $y' = \zeta$ verschiedene Wurzel der Gleichung

$$F(z, \eta, y') = 0, \tag{12.}$$

so verzweigt sich die algebraische Function y' von y nicht in $y = \eta$, $y' = \zeta_1$.

4.

Die Gleichung (A.) sei nach Potenzen von y' entwickelt

$$F(z, y, y') = a_0 y'^m + a_1 y'^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \tag{1.}$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten sind. Man kann voraussetzen, dass $a_0, a_1, \ldots, a_m$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es sei nunmehr η ein Werth von y, für welchen a_0 verschwindet, ohne dass zugleich Gleichung (C.) durch $y = \eta$ befriedigt wird. Setzen wir

$$y = \eta + u, \tag{2.}$$

so verwandelt sich (1.) in

$$a_0' y'^m + a_1' y'^{m-1} + \cdots + a_m' = 0, \tag{3.}$$

worin $a_0', a_1', \ldots, a_m'$ ganze rationale Functionen von u mit von z abhängigen Coefficienten sind. Man kann alsdann ein Gebiet B für die Variable z derart abgrenzen, dass für alle Werthe z dieses Gebietes η eindeutig und stetig, und dass eine Wurzel y' der Gleichung (3.) für $u = 0$ unendlich wird und diese Wurzel derselben innerhalb eines gewissen $u = 0$ umgebenden Kreises in der Form

$$y' = g_0 u^{-k} + g_1 u^{-k+1} + g_2 u^{-k+2} + \cdots \tag{4.}$$

706]

dargestellt wird, wo k eine positive ganze Zahl, und wo $g_0, g_1, g_2, \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen sind, convergent innerhalb eines ganz in B liegenden Kreises mit dem willkürlichen Punkte z_0 als Mittelpunkt. Da g_0 als Coefficient der niedrigsten Potenz von u nicht identisch Null ist, so können wir z_0 so wählen, dass g_0 von Null verschieden

ist für $z = z_0$, und da

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{du}{dz},$$

so folgt aus (4.) eine Gleichung der Form

$$\frac{du}{dz} = \gamma_0 u^{-k} + \gamma_1 u^{-k+1} + \cdots, \tag{5.}$$

wo $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$ nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihen sind, von welchen γ_0 für $z = z_0$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich auf bekannte Weise für u eine nach positiven ganzen Potenzen von $(z-z_0)^{\frac{1}{k+1}}$ fortschreitende Reihe. Es wäre demnach z_0 für u, folglich auch für y ein Verzweigungspunkt. Hieraus und aus Satz I. voriger Nummer ergiebt sich demnach:

I. Der Coefficient a_0 in Gleichung (1.) ist von y unabhängig oder, was dasselbe ist, die durch die Gleichung (A.) definirte algebraische Function y' von y wird, für willkürliche Werthe von z, für keinen endlichen Werth von y unendlich.

Ist

$$w = \Phi(z, y) \tag{6.}$$

eine rationale Function von y mit von z abhängigen Coefficienten und y Integral der Gleichung (A.), so genügt w einer Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integrale ebenfalls mit den Anfangswerthen nicht verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, wenn die Integrale von (A.) diese Eigenschaft haben.

Es sei insbesondere

$$w = \frac{1}{y}, \tag{7.}$$

also

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz}. \tag{8.}$$

Substituirt man (7.) und (8.) in (1.), so folgt

$$a_0\left(\frac{dw}{dz}\right)^m - a_1 w^2\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + a_2 w^4\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-2} - \cdots \pm a_m w^{2m} = 0. \tag{9.}$$

Da nach Satz I. $\frac{dw}{dz}$, für willkürliche Werthe von z, für keinen end- [707
lichen Werth von w unendlich sein darf, so ergiebt sich hieraus:

II. Der Coefficient a_k in Gleichung (1.) ist in Bezug auf y höchstens vom Grade $2k$.

5.

Fassen wir die Resultate der beiden vorigen Nummern zusammen, so erhalten wir folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung (A.) feste, sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden:

1. Die Gleichung (A.) hat die Form:

$$(F.) \qquad y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \cdots + \psi_m = 0,$$

worin $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit bedeuten, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung (C.), für welche die durch (F.) definirte algebraische Function y' von y sich verzweigt, so ist η ein Integral der Gleichung (F.). In der y' als algebraische Function von y darstellenden RIEMANNschen Fläche hat y' in sämmtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung

$$(E.) \qquad F(z, y, \zeta) = 0$$

mit der Unbekannten y.

6.

Indem ich mir vorbehalte, in eine Auseinanderlegung der verschiedenen Typen, welche die Differentialgleichung (A.) darbietet, wenn sie den Bedingungen der vorigen Nummer genügt, in dem allgemeinen Falle, bei [708] späterer Gelegenheit einzugehen, will ich mich gegenwärtig damit begnügen, noch einen interessanten speciellen Fall hervorzuheben, den Fall

nämlich, dass die algebraische Function y' von y, welche durch die Gleichung (F.) definirt worden, nach der Bezeichnung von RIEMANN zur Klasse $p = 0$ oder $p = 1$ gehört.

Es sei

I. $p = 0$.

Alsdann ist bekanntlich

$$y = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)}, \tag{1.}$$

$$y' = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_0(t)}, \tag{2.}$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ganze rationale Functionen von t, in unserem Falle mit von z abhängigen Coefficienten. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}$ mit $\overline{\varphi}_i$ und $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ mit φ_i', so folgt durch Differentiation von (1.) und durch Vergleichung mit (2.)

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\varphi_0\varphi_2 - \overline{\varphi}_1\varphi_0 + \varphi_1\overline{\varphi}_0}{\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0'}. \tag{3.}$$

Wenn die Verzweigungspunkte der Integrale von (F.) nicht mit den Anfangswerthen sich stetig ändern, so hat das Integral t der Gleichung (3.) die gleiche Eigenschaft. Nach voriger Nummer Bedingung 1. muss daher

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\varphi_0\varphi_2 - \overline{\varphi}_1\varphi_0 + \varphi_1\overline{\varphi}_0}{\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0'} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \tag{4.}$$

sein, wo A_0, A_1, A_2 von z allein abhängen.

Sind die Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ vom m^{ten} Grade in Bezug auf t, so ist $\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0'$ vom $2m-2^{\text{ten}}$ Grade, und die Gleichung (4.) liefert daher $2m-2$ Bedingungsgleichungen zwischen den $3m+2$ Coefficienten von $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ und den Ableitungen der ersten Ordnung der Coefficienten von φ_0 und φ_1 nach z.

Es sei

II. $p = 1$.

Alsdann ist, wie bekannt*),

$$y = \frac{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R(t)}}{\varphi_0 + \psi_0\sqrt{R(t)}}, \tag{5.}$$

$$y' = \frac{\varphi_2 + \psi_2\sqrt{R(t)}}{\varphi_0 + \psi_0\sqrt{R(t)}}, \tag{6.}$$

*) Vergl. CLEBSCH, BORCHARDTs Journal, Bd. 64, S. 222.

709] wo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ganze rationale Functionen von t vom Grade $k \leqq \frac{1}{2}m$, ψ_0, ψ_1, ψ_2 ganze rationale Functionen von t vom Grade $h \leqq \frac{1}{2}m$, derart, dass $h+k = m-2$, und R eine ganze rationale Function von t vom 4ten Grade, in unserem Falle diese sämmtlichen Functionen mit von z abhängigen Coefficienten behaftet.

Differentiirt man Gleichung (5.) und vergleicht das Resultat mit (6.), so erhält man für $\frac{dt}{dz}$ eine Differentialgleichung (ε.), welche die Eigenschaft haben muss, dass die Verzweigungspunkte ihrer Integrale t sich nicht mit den Anfangswerthen verschieben, wenn Gleichung (F.) diese Eigenschaft besitzt. Die Differentialgleichung (ε.) wird aber in Bezug auf $\frac{dt}{dz}$ vom 2ten Grade. Nach No. 5 Bedingung 1. muss daher $\frac{dt}{dz}$ die Form haben

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \lambda\sqrt{R(t)}, \tag{7.}$$

wo A_0, A_1, A_2, λ von z allein abhängen. Vergleicht man hiermit die Gleichung (ε.), so erhält man $2m+3$ Bedingungsgleichungen zwischen den im Allgemeinen in der Zahl $3m+4$ vorhandenen Coefficienten der $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, R$ und den ersten Ableitungen nach z derer von $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, R$.

Nach der Bedingung 2. in No. 5 muss ferner sein:

$$\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R(t), \tag{8.}$$

wo B_0, B_1 von z allein abhängen. Hieraus folgen noch vier Gleichungen zwischen den genannten Coefficienten und Ableitungen. Die Gesammtzahl der Bedingungen ist also im Allgemeinen $2m+7$.

7.

Ein Beispiel zu der in voriger Nummer bezeichneten speciellen Klasse von Differentialgleichungen bietet der Fall, wo der Factor der Discriminante $D(z,y)$ der Gleichung (F.), welcher gleich Null gesetzt die Verzweigungswerthe $y = \eta$ von y' liefert, von z unabhängig ist.

Denn es sei

$$D(z,y) = f(y) D'(z,y), \tag{1.}$$

wo $f(y)$ eine ganze rationale Function von y mit von z unabhängigen Coefficienten bedeutet, und der Art, dass

(2.) $$f(y) = 0$$ [710

allein die Verzweigungsstellen $y = \eta$ der algebraischen Function y' von y liefert, während

(3.) $$D'(y, z) = 0$$

nur zu sich aufhebenden Verzweigungspunkten führt.

Da wenn $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung (2.) ist, für welche sich y' verzweigt, $\zeta = \frac{d\eta}{dz} = 0$ ist, so verzweigt sich nach der Bedingung 2. in No. 5 y' nur für Wurzeln y der Gleichung

(4.) $$\psi_m = 0 \quad \text{(s. Gleichung (F.))}$$

und zwar, wenn für $y' = 0$, $y = \eta$ k Verzweigungen von je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ Blättern stattfinden, so ist der Factor $y - \eta$ nach der Bedingung 3. in No. 5 mindestens

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \cdots + \alpha_k - 1$$

mal in ψ_m enthalten.

Hieraus ergiebt sich, wenn mit w die Gesammtanzahl der einfachen Verzweigungen der die Function y' von y darstellenden RIEMANNschen Fläche bezeichnet wird, dass w eine Zahl ist, welche den Grad von ψ_m nicht übersteigt, d. h. nach Bedingung 1. in No. 5

(5.) $$w \leqq 2m.$$

Nach der Gleichung

(6.) $$w - 2m = 2(p-1)^*)$$

folgt daher $p = 0$ oder $p = 1$.

Der einfachste Fall in diesem Beispiel ereignet sich, wenn die Coefficienten $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ in Gleichung (F.) selber von z unabhängig sind, in welchem Falle Gleichung (F.) mit derjenigen Gleichung zusammenfällt, welche BRIOT und BOUQUET**) aufgestellt haben, und von welcher sie nachgewiesen haben, dass ihre Integrale eindeutige, und zwar entweder rationale oder einfach oder doppeltperiodische Functionen der Variabeln z sind; Resultate, die sich übrigens auch aus unseren obigen Deductionen unmittelbar ergeben.

*) Vergl RIEMANN, ABELsche Functionen, BORCHARDTs Journal, Bd. 54[1]), No. 7.

**) Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, p. 212, théorème 22.

[1]) Riemanns Werke (1892), Abh. VI, S. 100 ff. Sch.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 357, Zeile 15 eine gewisse statt einer gewissen,

„ 358, „ 9 v. u. abhängigen statt unabhängigen.

2) Man vergl. die auf die vorstehende Abhandlung Bezug nehmenden Bemerkungen in der Einleitung zu der Abhandlung LIII. SCH.

XLIV.

ANTRITTSREDE
GEHALTEN AM 3. JULI 1884 IN DER ÖFFENTLICHEN SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZ-TAGES DER KÖNIGL. PREUSS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

(Sitzungsberichte, 1884, XXXIII, S. 744—747; ausgegeben am 10. Juli 1884.)

Der heutige Tag, an welchem ich zum ersten Male als ordent- [744
liches Mitglied an einer öffentlichen Sitzung der Königlichen Akademie der Wissenschaften Theil nehme, giebt mir die willkommene Gelegenheit, der Akademie für die hohe Auszeichnung zu danken, welche mir durch die Aufnahme in diesen Kreis der hervorragendsten Vertreter aller Zweige wissenschaftlicher Forschung zu Theil geworden. Ich schätze mich glücklich, in Vereinigung mit Männern, welche ich schon seit meinen ersten Schritten in den mathematischen Wissenschaften als Vorbilder und zum Theil als unmittelbare Lehrer verehrte, mich den Aufgaben dieser Akademie widmen zu können. Möge es mir vergönnt sein, durch die That das Vertrauen, welches die Akademie in mich gesetzt, zu rechtfertigen, insbesondere dadurch, dass ich auf den Wegen, welche ich eingeschlagen, Einiges für die Wissenschaft Erspriessliches erziele.

Meine ersten selbstständigen mathematischen Versuche bewegten sich auf den Gebieten der Zahlentheorie und desjenigen Theiles der Geometrie, welcher mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zusammenhängt. Der grossen Mannigfaltigkeit ihrer Methoden verdankt die Zahlen- [745

theorie die Eigenthümlichkeit, jedem, der sich ihr widmet, ein schätzenswerthes Geschenk mit auf den Weg geben zu können, auch wenn dieser Weg scheinbar weitab von den eigentlichen Zielen dieser Wissenschaft führt. So fand auch ich mich durch die Beschäftigung mit derselben gefördert, als ich durch die genannten geometrischen Studien zur Analysis übergeführt worden war, wo ich bald insbesondere der Theorie der Differentialgleichungen und der sich daraus ergebenden Functionen mein Interesse zuwandte.

In älteren auf Differentialgleichungen bezüglichen Forschungen betrachtete man zumeist die Integration solcher Gleichungen als vollendet, wenn es gelungen war, sie so umzugestalten, dass man auf dieselben sogenannte Quadraturen ausüben konnte. Wenn nun auch nicht geläugnet werden soll, dass die dahin zielenden Untersuchungen zu vielen bedeutsamen Resultaten geführt haben, so darf man jedoch nicht übersehen, dass einerseits die Zurückführung auf Quadaturen nur in den seltensten Fällen möglich ist, und dass diese andererseits in den Fällen, wo sie gelingt, über die Natur der Integrale der Differentialgleichungen nicht genügenden Aufschluss giebt. Die letztere Behauptung wird schon durch das einfache Beispiel der Differentialgleichungen, welchen die elliptischen Functionen genügen, bekräftigt, da hier die Quadratur unmittelbar gegeben, und doch erst die grosse von Abel und Jacobi ausgebildete Theorie der elliptischen Functionen erforderlich ist, um die Eigenschaften der Functionen zu ergründen, welche jene Differentialgleichungen befriedigen. — Wir fassen vielmehr die Aufgabe der Integration der Differentialgleichungen dahin auf, die Natur der Functionen zu kennzeichnen, welche denselben als Integrale genügen.

Tritt man nun an diese Aufgabe heran, so erkennt man sofort, dass hier, wie oft in der Wissenschaft, ein Erfolg nur durch Beschränkung zu erzielen möglich ist. Denn der weiteren Verfolgung der Eigenschaften, welche den Integralen aller Differentialgleichungen zukommen, wird bald dadurch eine Grenze gesetzt, dass es solcher Eigenschaften nur wenige giebt. In Wahrheit sind es eben die Singularitäten, die einer einzelnen Gleichung zukommen, welche die wesentliche Natur neuer Functionsklassen begründen. Es ist vielmehr die zunächst zu verfolgende Aufgabe, die Differentialgleichungen nach gemeinschaftlichen Merkmalen ihrer Integrale in Klassen zu gruppiren und jede einzelne Klasse einem gesonderten Studium zu unterziehen. — Bei

der Aufsuchung gemeinsamer Merkmale, wonach eine solche Klasse zu bilden ist, muss man natürlich bekannte Functionenkreise zu Hülfe rufen. So ist es eine Eigenthümlichkeit einer algebraischen Function, dass alle Wege der unabhängigen Variabeln für dieselbe nur eine beschränkte Anzahl von Werthen [746 hervorbringen. Eine Klasse von Differentialgleichungen wird den algebraischen Gleichungen zwischen zwei Variabeln am nächsten stehen, wenn die durch alle Wege der unabhängigen Variabeln erzielten Integralwerthe durch eine beschränkte Anzahl von Elementen am einfachsten ausdrückbar sind. Diese Klasse ist die der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, deren Integration im oben bezeichneten Sinne von mir unternommen wurde. Nachdem ich die Grundlagen der Theorie dieser Differentialgleichungen entwickelt, zeigte sich alsbald, dass dieselbe nicht nur auf bereits erforschte Gebiete der Analysis neues Licht werfe, sondern dass dieselbe auch zu neuen Problemen und Zielen hinzuführen geeignet sei. In der That hatte ich die Genugthuung, dass sich seit dem Erscheinen meiner ersten auf lineare Differentialgleichungen bezüglichen Abhandlungen eine grosse Anzahl von Mathematikern mit mir in dem Streben vereinigte, theils die Theorie der linearen Differentialgleichungen selbst fortzubilden, theils die mannigfachen durch diese Theorie hervorgerufenen functionentheoretischen Fragen zu erforschen.

Ein tieferes Eingehen auf die Natur der Functionen, welche den eben bezeichneten Differentialgleichungen genügen, veranlasste mich auch eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln einzuführen, wovon die Abelschen Functionen einen besonderen Fall bilden. Hier handelte es sich zunächst um die Frage, welcher Art diejenigen Functionen sind, welche in dem Jacobischen Umkehrungssatze die Stelle der algebraischen Functionen einnehmen dürfen, wenn die Umkehrbarkeit erhalten werden soll. Nachdem mir die Lösung dieser Frage und die Auffindung einer Eigenschaft der ersteren Functionen gelungen, welche für die neue Functionengattung eine ähnliche Grundlage bildet, wie das Abelsche Theorem für die algebraischen Functionen, bleibt nun vor allem noch das Problem zu lösen, die eingeführten Functionen mehrerer Variabeln analytisch darzustellen, für diese Functionen also dasselbe anzustreben, was für die Abelschen Functionen von Herrn Weierstrass und von Riemann geleistet worden ist. — Zu einem weiteren Forschen werde ich

auch auf diesem Gebiete durch den glücklichen Umstand ermuthigt, dass meine Untersuchungen zu fruchtbaren Arbeiten anderer Mathematiker Anlass gegeben. So ist, angeregt durch das Studium meiner ersten Arbeiten auf diesem Gebiete, und ausgehend von der durch Umkehrung des Quotienten zweier Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entstehenden Function, welche ich in diesen Arbeiten im allgemeinen Sinne einführte nachdem ich besondere Fälle derselben in meinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen schon früher behandelt hatte, Herr POINCARÉ 747] dahin gelangt, die Integrale der linearen Differentialgleichungen auf ähnliche Weise darzustellen, wie man die Integrale algebraischer Functionen mit Hülfe der ABELschen Functionen ausdrückt.

XLV.

ÜBER EINE FORM, IN WELCHE SICH DAS ALLGEMEINE INTEGRAL EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG BRINGEN LÄSST, WENN DASSELBE ALGEBRAISCH IST.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, LI, S. 1171—1177; vorgetragen am 11. December; ausgegeben am 18. December 1884.)

1.

Es sei [1171

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z, A, B, \ldots\right) = 0 \tag{A.}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Art, dass f eine ganze rationale Function von $\frac{dy}{dz}, y, z$ und einer endlichen Anzahl gegebener Functionen $A, B, \ldots$ von z, deren Ableitungen ebenfalls rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ sind und welche überdiess nicht mit z und unter einander durch eine algebraische Gleichung verbunden sind. Der Grad von f sei der m^{te} in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$, und es werde vorausgesetzt, dass f in dem Sinne irreductibel ist, dass dasselbe nicht in Factoren von gleicher Beschaffenheit wie f und von niedrigerem Grade in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ zerlegbar sei.

Es möge das allgemeine Integral der Gleichung (A.) einer Gleichung

$$F(y, z) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{1.}$$

genügen, deren Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ganze rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ sind.

Es sei

$$a_i = \sum P^{(i)}_{\varkappa\lambda\mu\ldots} z^\varkappa A^\lambda B^\mu \ldots, \tag{2.}$$

wo die Grössen P Constanten bedeuten. Man bestimmt diese Constanten dadurch, dass man zwischen den Gleichungen (1.), (A.) und

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dz} = 0 \tag{3.}$$

1172] $\frac{dy}{dz}$ und y eliminirt. Da die resultirende Gleichung in Bezug auf $z, A, B, \ldots$ identisch erfüllt sein muss, so ergiebt sich aus derselben eine gewisse Anzahl algebraischer Gleichungen zwischen den Coefficienten P, welche alle diese Grössen durch eine derselben, die wir mit c bezeichnen wollen, bestimmen. Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen aus Gleichung (1.) die sämmtlichen Grössen P bis auf die eine c, so erhält man eine Gleichung

$$\varphi(c, y, z) = 0 \tag{4.}$$

von der Beschaffenheit, dass φ eine ganze rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$ wird. Dieses liefert also den Satz:

Wenn das allgemeine Integral y der Gleichung (A.) eine algebraische Function von $z, A, B, \ldots$ sein soll, so genügt y einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ und einer willkürlichen Constanten c sind.

Wir setzen voraus, dass die Gleichung (4.) von allen fremden Factoren befreit sei, d. h. dass sie die Eigenschaft habe, dass nach Substitution eines beliebigen constanten Werthes für c sämmtliche Wurzeln y derselben Integrale der Gleichung (A.) werden. Dieses vorausgesetzt, sei $G(c, y, z)$ ein irreductibler Factor von φ, d. h. eine ganze rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$, welche nicht in gleichgeartete Factoren niedrigeren Grades in Bezug auf c zerlegbar ist. Wir wollen im Folgenden die Gleichung

$$G(c, y, z) = 0 \tag{B.}$$

einer näheren Untersuchung unterziehen.

2.

Wir betrachten die Function c der beiden unabhängigen Variabeln y, z, welche durch die Gleichung (B.) definirt wird. Diese hat die Eigenschaft,

für Werthenpaare y, z, welche einem und demselben Integrale der Gleichung (A.) angehören, einen constanten Werth anzunehmen.

Die Function Δ der beiden unabhängigen Variabeln y, z, welche durch die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta = 0 \tag{C.}$$

definirt wird, ist eine rationale Function von $c, y, z, A, B, \ldots$, während dieselbe als Function von $y, z, A, B, \ldots$ einer algebraischen Gleichung

$$h(\Delta, y, z) = 0 \tag{1.}$$

genügt, welche sich als Resultat der Elimination von c zwischen den [1173 Gleichungen (B.) und (C.) ergiebt.

Setzen wir in Gleichung (1.) $\frac{dy}{dz}$ statt Δ, und bezeichnen mit η irgend ein Integral der Gleichung

$$h\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0, \tag{2.}$$

so liefern $y = \eta$, $\Delta = \frac{d\eta}{dz}$ gemeinsame Lösungen c der beiden Gleichungen (B.) und (C.). Es sei eine derselben $c = \gamma$, so ist also gleichzeitig

$$G(\gamma, \eta, z) = 0 \tag{3.}$$

und

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dz} = 0. \tag{4.}$$

Durch Differentiation der Gleichung (3.) nach z folgt aber

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dz} + \frac{\partial G}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dz} = 0. \tag{5.}$$

Aus (4.) und (5.) ergiebt sich demnach

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dz} = 0. \tag{6.}$$

Man kann die Anfangswerthe y_0, z_0 des Integrals η so wählen, dass die Discriminante der durch die Gleichung (B.) definirten Function c von y, z nicht durch $y = y_0$, $z = z_0$ befriedigt wird. Dann ist aber $\frac{\partial G}{\partial \gamma}$ nicht Null,

folglich

$$\frac{d\gamma}{dz} = 0 \tag{7.}$$

d. h. γ eine Constante, was soviel besagt als:

Jedes Integral der Gleichung (2.) stellt ein Integral der Gleichung (A.) dar.

Man kann aber y_0, z_0 willkürlich wählen, also muss für willkürliche Werthenpaare y, z die Wurzel $\frac{dy}{dz}$ der Gleichung (2.) der Gleichung (A.) genügen. Nun aber ist unserer Voraussetzung nach für von einander unabhängige Werthe der Variabeln y, z $f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right)$ nicht in gleichgeartete Factoren niedrigeren Grades in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ zerlegbar. Hieraus folgt:

1174] Die Function $h(\Delta, y, z)$ ist bis auf einen von Δ unabhängigen Factor identisch eine Potenz der Function $f(\Delta, y, z)$.

3.

Es seien c_1, c_2 zwei verschiedene Zweige der durch die Gleichung (B.) definirten Function c der unabhängigen Variabeln y, z, für welche die durch die Gleichung (C.) definirte Function Δ von $c, y, z, A, B, \ldots$ ein und denselben Werth annimmt.

Aus den Gleichungen

$$G(c_1, y, z) \equiv G(c_1) = 0, \tag{1.}$$

$$G(c_2, y, z) \equiv G(c_2) = 0 \tag{2.}$$

folgt

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(c_1)}{\partial z} dz = 0, \tag{3.}$$

$$\frac{\partial G(c_2)}{\partial c_2} dc_2 + \frac{\partial G(c_2)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(c_2)}{\partial z} dz = 0. \tag{4.}$$

Da der Voraussetzung nach

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial z} : \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} = \frac{\partial G(c_2)}{\partial z} : \frac{\partial G(c_2)}{\partial y},$$

so folgt aus (3.) und (4.)

$$\frac{\partial G(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial G(c_2)}{\partial y} dc_1 - \frac{\partial G(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial G(c_1)}{\partial y} dc_2 = 0. \tag{5.}$$

Ist demnach c_1 constant, so ist auch c_2 constant, und umgekehrt, oder mit anderen Worten:

I. Zwischen je zwei Zweigen c_1, c_2, für welche Δ den nämlichen Werth erhält, findet eine von y, z unabhängige Relation statt.

Eliminirt man y zwischen den Gleichungen (1.) und (2.), so enthält die Resultante einen von z unabhängigen Factor $H(c_1, c_2)$ von der Beschaffenheit, dass die in Bezug auf c_1, c_2 symmetrische algebraische Gleichung

$$H(c_1, c_2) = 0 \tag{D.}$$

durch alle Zweigenpaare c_1, c_2 der Function c befriedigt wird, für welche Δ jedesmal einen und denselben Werth annimmt.

Ist $c_1 = \gamma$ ein willkürlicher Werth, $c_2 = \gamma'$ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$H(\gamma, c_2) = 0,$$

so haben die Gleichungen

$$G(\gamma, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(\gamma', y, z) = 0$$

gemeinschaftliche Lösungen y für einen beliebigen Werth von z, ebenso [1175 gemeinschaftliche Lösungen z für einen beliebigen Werth von y.

II. Ist demnach c_1 irgend ein Zweig der Function c, so ist jede Wurzel c_2 der Gleichung (D.) ebenfalls ein Zweig der Function c, und zwar ein solcher, welcher Δ denselben Werth verschafft wie c_1.

Ist $c_1 = \zeta$ irgend ein Zweig der Function c, und sind $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(l)}$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$H(\zeta, c_2) = 0 \tag{6.}$$

mit der Unbekannten c_2, so sind hiernach diese Wurzeln die einzigen Zweige der Function c, welche Δ denselben Werth verleihen wie ζ. Hieraus folgt, dass die l Wurzeln der Gleichung

$$H(\zeta^{(i)}, c_2) = 0 \tag{7.}$$

mit der Unbekannten c_2 durch die Reihe $\zeta, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(i-1)}, \zeta^{(i+1)}, \ldots, \zeta^{(l)}$ dar-

gestellt werden, da die Wurzeln der Gleichung (7.) alle diejenigen Zweige der Function c liefern, welche Δ denselben Werth ertheilen wie $\zeta^{(\omega)}$, also auch wie ζ.

Es ist demnach

$$\Gamma = (\alpha-\zeta)(\alpha-\zeta^{(1)})(\alpha-\zeta^{(2)})\dots(\alpha-\zeta^{(\omega)}), \tag{8.}$$

wo α eine beliebige aber bestimmte Grösse bedeutet, eine rationale Function von ζ mit constanten Coefficienten, welche ungeändert bleibt für alle Zweige ζ der Function c, für welche Δ denselben Werth erhält, dagegen aber für zwei Zweige, für welche Δ verschiedene Werthe annimmt, auch verschiedene Werthe hat. Nach einem bekannten Satze der Algebra sind daher Γ und Δ rationale Functionen von einander mit Coefficienten, welche rational von $y, z, A, B, \dots$ abhangen. Insbesondere sei

$$\Gamma = \mathfrak{R}(\Delta, y, z, A, B, \dots), \tag{E.}$$

wo $\mathfrak{R}$ eine rationale Function der Argumente darstellt.

Nach No. 2 ist Δ eine algebraische Function der Variabeln y, z, welche der irreductiblen Gleichung

$$f(\Delta, y, z, A, B, \dots) = 0 \tag{F.}$$

genügt.

Ist y gleich einer Function η von z von der Beschaffenheit, dass $y = \eta$ in (F.) und (E.) substituirt Γ einen von z unabhängigen Werth verleiht, so ist für $y = \eta$ auch ein Zweig ζ der Function c von z unabhängig, also ist $y = \eta$ ein Integral der Gleichung (A.). Ist umgekehrt $y = \eta$ ein Integral der Gleichung (A.), so geht für $y = \eta$ ein Zweig ζ der Function c in einen
1176] von z unabhängigen Werth über, also wird für $y = \eta$ auch ein zugehöriger Werth von Γ constant. Wir erhalten also den Satz:

III: Wenn das allgemeine Integral der Gleichung (A.) eine algebraische Function von $z, A, B, \dots$ ist, so lässt sich dasselbe stets in die Form der Gleichung (E.) bringen, worin Γ eine willkürliche Constante, $\mathfrak{R}$ eine bestimmte rationale Function von $y, z, A, B, \dots$ und einer Grösse Δ bedeutet, welche durch die Gleichung (F.) definirt wird.

4.

Die Gleichungen (E.) und (F.) liefern ein einfaches Mittel, zu gleicher Zeit zu prüfen, ob das allgemeine Integral der Gleichung (A.) algebraisch ist, und dasselbe darzustellen, wenn es vorhanden ist.

Da nämlich die Gleichung (A.) in Bezug auf $\frac{dy}{dz}$ vom m^{ten} Grade ist, so ist auch der Grad von Δ in Gleichung (F.) der m^{te}. Es ist also nach Gleichung (E.)

$$\Gamma = \psi_0 + \psi_1 \Delta + \psi_2 \Delta^2 + \cdots + \psi_{m-1} \Delta^{m-1}, \tag{1.}$$

wo $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \ldots$ bedeuten. Nimmt man in dieser Gleichung für Γ einen constanten Werth, so ergiebt sich aus derselben Gleichung nach Satz III. voriger Nummer y als Integral der Gleichung (A.). Es ist dann

$$\frac{dy}{dz} = \Delta. \tag{2.}$$

Aus Gl. (F.) ergiebt sich ferner

$$\frac{d\Delta}{dz} = \chi_0 + \chi_1 \Delta + \chi_2 \Delta^2 + \cdots + \chi_{m-1} \Delta^{m-1}, \tag{3.}$$

wo $\chi_0, \chi_1, \ldots$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \ldots$ bedeuten.

Differentiirt man daher die Gleichung (1.) unter der Voraussetzung, dass Γ constant, so ergiebt sich nach Substitution von (2.) und (3.) eine Gleichung der Form

$$P_0 + P_1 \Delta + P_2 \Delta^2 + \cdots + P_{m-1} \Delta^{m-1} = 0, \tag{4.}$$

worin $P_0, P_1, \ldots$ rationale Functionen von $y, z, A, B, \ldots$ sind.

Wegen der Irreductibilität der Gleichung (F.) ist dann identisch für jedes Werthsystem $y, z, A, B, \ldots$

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad \ldots, \quad P_{m-1} = 0. \tag{G.}$$

Indem man also nach Aufstellung dieser Gleichungen in jeder der- [1177
selben die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y gleich Null setzt, erhält man eine Anzahl von Differentialgleichungen für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y in den zu bestimmenden Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$, und für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y

in den in der Gleichung

$$(5.) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = q_0\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + q_1\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \cdots + q_m = 0$$

auftretenden Grössen $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Diese Differentialgleichungen müssen durch rationale Functionen von $z, A, B, \ldots$ befriedigt werden können, wenn das allgemeine Integral der Gleichung (A.) algebraisch sein soll.

XLVI.

ÜBER DEN CHARACTER DER INTEGRALE VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWISCHEN COMPLEXEN VARIABELN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, II, S. 5—12; vorgetragen am 15. Januar; ausgegeben am 22. Januar 1885.)

Als JACOBI die für ein elliptisches Integral erster Gattung gelungene [5 Umkehrung auf die hyperelliptischen Integrale auszudehnen suchte, erkannte er, dass dieses Problem nicht ausführbar sei, indem er nachwies*), dass die obere Grenze eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung insofern nicht als analytische Function des Integralwerthes aufgefasst werden kann, als jedem Werthe der letzteren Grösse jeder Werth der ersteren entspricht, und umgekehrt. — Erst durch Einführung mehrerer Systeme von Integralen erster Gattung, mit von einander unabhängigen oberen Grenzen, gelangte er zu einer Gattung von Functionen mehrerer Variabeln**), welche eine vollständige Analogie mit den elliptischen Functionen darbieten.

Ist $R(x)$ eine ganze rationale Function höheren als vierten Grades, so lässt sich das JACOBISCHE Resultat auch dahin aussprechen, dass die Integrale x der Differentialgleichung

$$(\alpha.) \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$

nicht als analytische Functionen von u aufgefasst werden können.

---

*) CRELLEs Journal, Bd. 13, S. 55 ff. [1]).

**) CRELLEs Journal, Bd. 9, S. 394 ff. [2]).

---

[1]) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 23 ff. Sch.

[2]) Ebenda S. 5 ff. Sch.

Es ist selbstverständlich, dass alle Differentialgleichungen, welche aus (α.) durch analytische Transformationen hervorgehen, die gleiche Eigenschaft besitzen.

Es ist aber ein für die Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen wesentlicher Umstand, dass es auch unter den Differentialgleichungen jeder Ordnung und jeden Grades, welche nicht nur Transformationen von (α.) sind, Klassen solcher Art giebt, welche zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes festsetzen, so lange jene Veränderlichen complexe Werthe annehmen dürfen. 6] Wir erlauben uns im Folgenden (No. 1 und 2) den Nachweis hierfür an dem Beispiele zweier Klassen von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu führen. Dasselbe Beispiel zeigt zu gleicher Zeit den Weg, auf welchem man zu anderen Differentialgleichungen von höherem Grade und höherer Ordnungszahl von gleicher Eigenschaft gelangen kann.

Wenn wir unsere Betrachtungen auf algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(\beta.) \qquad f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0$$

beschränken und die Annahme machen, dass die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen*), sei es, dass y als Function von z, sei es, dass z als Function von y aufgefasst wird, so ist durch (β.) stets y als analytische Function von z definirt (No. 3).

Wenn dagegen die Integrale der Gleichung (β.), entweder wenn man y als Function von z oder wenn man z als Function von y betrachtet, mit den Anfangswerthen verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, so kann es eintreten, dass die Gleichung (β.) durch keine analytische Function y von z befriedigt wird.

1.

Es sei eine Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + p\frac{dy}{dz} + qy = 0$$

*) S. meine Arbeit, Sitzungsberichte, 26. Juni 1884, S. 699[1]).

[1]) Abh. XLIII, S. 355 dieses Bandes. Sch.

gegeben, von der Beschaffenheit, dass

$$(2.)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{1}{z-a_1}+\dfrac{1}{z-a_2}+\dfrac{1}{z-a_3}+P, \\ q = \dfrac{\beta_1}{z-a_1}+\dfrac{\beta_2}{z-a_2}+\dfrac{\beta_3}{z-a_3}+Q, \end{cases}$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ constante Grössen, P, Q rationale Functionen von z sind, welche für keinen der Werthe a_1, a_2, a_3 von z unendlich werden.

Ist a_i einer der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, so gehört*) zu a_i ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.) der Form

$$\varphi_i,\ \psi_i + \varphi_i \log(z-a_i),$$

wo φ_i, ψ_i in der Umgebung von a_i eindeutige, endliche und stetige Functionen bezeichnen.

Es lässt sich nun zeigen, dass a_1, a_2, a_3 so gewählt werden können, dass [7 die Gleichung (1.) ein Integral φ besitzt, welches in der Umgebung jedes dieser Punkte eindeutig, endlich und stetig ist. Man hat alsdann

$$(3.)\qquad \varphi_i = \gamma_i \varphi, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo γ_i eine constante Grösse.

Es sei nunmehr

$$(4.)\qquad y = A_1\gamma_1\varphi + B_1(\psi_1 + \gamma_1\varphi \log(z-a_1))$$

ein beliebiges Integral der Gleichung (1.), also A_1, B_1 beliebig vorgeschriebene constante Grössen. Nach einem k-maligen Umlaufe von z um a_1 gehe y über in y_k, so ist

$$(5.)\qquad y_k = y + 2\pi k i B_1\gamma_1\varphi.$$

Es sei ferner dasselbe Integral y aus Gleichung (4.) dargestellt durch das zu a_2 gehörige Fundamentalsystem

$$(6.)\qquad y = A_2\gamma_2\varphi + B_2(\psi_2 + \gamma_2\varphi \log(z-a_2)),$$

so wird y_k nach einem l-maligen Umlauf von z um a_2 in

$$(7.)\qquad y_{kl} = y + (2\pi k i B_1\gamma_1 + 2\pi l i B_2\gamma_2)\varphi$$

übergehen.

*) S. meine Arbeit in BORCHARDTs Journal, Bd. 66, S. 121 ff.[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 159 ff. Sch.

Ist endlich dasselbe Integral y ausgedrückt durch das zu a_s gehörige Fundamentalsystem

$$y = A_s\gamma_s\varphi + B_s(\psi_s + \gamma_s\varphi \log(z-a_s)), \tag{8.}$$

so geht y_k nach einem m-maligen Umlauf von z um a_s über in

$$y_{klm} = y + (2\pi k i B_1\gamma_1 + 2\pi l i B_2\gamma_2 + 2\pi m i B_3\gamma_3)\varphi. \tag{9.}$$

Setzt man

$$B_k\gamma_k = b_k + c_k\sqrt{-1},$$

so findet im Allgemeinen zwischen den Grössen

$$b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1$$

nicht eine lineare homogene Gleichung mit realen und ganzzahligen Coefficienten statt. Es wird daher nach den von JACOBI*) entwickelten Principien durch geeignete Wahl von k, l, m

$$kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3 = G \tag{10.}$$

werden, wo G eine beliebig vorgeschriebene Grösse bedeutet**).

Unter den gemachten Voraussetzungen wird demnach das allgemeine Integral y der Gleichung (1.) für jeden Werth von z jeden beliebigen Werth annehmen können.

8] 2.

Es sei y ein bestimmter Zweig eines Integrals der Gleichung (1.) voriger Nummer, und es werde

$$u = \frac{d\log y}{dz} \tag{1.}$$

gesetzt, so folgt aus Gleichung (1.) voriger Nummer

$$\frac{du}{dz} + u^2 + pu + q = 0. \tag{2.}$$

*) CRELLES Journal, Bd. 13, S. 55 ff. [1]).

**) Vergl. KRONECKER, Sitzungsberichte, 1884, S. 1182, § 2.

[1]) Jacobis Werke, Band II, S. 23 ff. Sch.

Ist y durch Gleichung (4.) voriger Nummer definirt, so wird u in

$$u_{klm} = \frac{\frac{dy}{dz} + 2\pi i(kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3)\frac{d\varphi}{dz}}{y + 2\pi i(kB_1\gamma_1 + lB_2\gamma_2 + mB_3\gamma_3)\varphi} \tag{3.}$$

übergehen, wenn z successive k Umläufe um a_1, l Umläufe um a_2 und m Umläufe um a_3 gemacht hat. Ist daher H eine beliebig vorgeschriebene Grösse, so können k, l, m so gewählt werden, dass für jeden bestimmten Werth von z

$$u_{klm} = H \tag{4.}$$

werde. Man hat zu dem Zwecke die Grösse G in voriger Nummer nur nach der Gleichung

$$G = \frac{Hy - \frac{dy}{dz}}{2\pi i\left(\frac{d\varphi}{dz} - H\varphi\right)} \tag{5.}$$

zu wählen.

Betrachtet man in der Differentialgleichung (2.) z als die unabhängige Veränderliche, so hat das Integral u derselben die Eigenschaft, dass seine Verzweigungspunkte nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbar sind*).

Betrachtet man dagegen in derselben Gleichung u als unabhängige Veränderliche, so haben die Integrale z derselben mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte, da $\frac{dz}{du}$ für willkürliche Werthe von u und dazu gehörige nach der Gleichung

$$u^2 + pu + q = 0 \tag{6.}$$

zu bestimmende Werthe von z unendlich wird**).

Die Gleichung (2.) liefert demnach ein Beispiel zu der im Eingange [9 erwähnten Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, welchen keine analytische Beziehung zwischen u und z zugehört.

---

*) S. meine Arbeit, Sitzungsberichte, 1884, S. 708[1]).

**) Ebendaselbst S. 704[2]).

---

1) Abh. XLIII, S. 365 dieses Bandes. Sch.

2) S. 360 dieses Bandes. Sch.

3.

Es sei

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0, \tag{1.}$$

wo f eine rationale Function der Argumente bedeutet. Setzen wir voraus, dass die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, sei es, dass man z, sei es, dass man y als unabhängige Variable betrachtet, so hat Gleichung (1.) zunächst die Form

$$\gamma_{2m}(z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + P_1\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \cdots + P_{m-1}\frac{dy}{dz} + \psi_{2m}(y) = 0^*), \tag{2.}$$

worin $\gamma_{2m}(z)$ eine ganze rationale Function von z von höchstens dem $2m^{ten}$ Grade mit von y unabhängigen Coefficienten, $\psi_{2m}(y)$ eine ganze rationale Function von y von höchstens dem $2m^{ten}$ Grade mit von z unabhängigen Coefficienten bedeutet.

Es sei nach den Bezeichnungen meiner Arbeit**)

$$D(z, y) = 0 \tag{3.}$$

die Discriminantengleichung der algebraischen Function $\frac{dy}{dz}$ von z und y, welche durch Gleichung (2.) definirt wird. Für einen Zweig der durch (3.) definirten algebraischen Function, welcher nicht von z unabhängige Werthe von y, oder von y unabhängige Werthe von z liefert, ergiebt sich nach den über die Gleichung (2.) gemachten Voraussetzungen aus meiner citirten Arbeit***), dass die daselbst auftretenden Grössen k und α resp. die Werthe Null und Eins annehmen, oder was dasselbe ist:

Die durch die Gleichung (2.) definirte algebraische Function $\frac{dy}{dz}$ von y, z verzweigt sich nach den über diese Gleichung gemachten Voraussetzungen, als Function von y aufgefasst, nur für

*) Sitzungsberichte, 1884, S. 707[1]).

**) Ebendaselbst S. 702[2]).

***) Ebendaselbst S. 702—705[3]).

1) S. 364 dieses Bandes. Sch.

2) S. 359 dieses Bandes. Sch.

3) S. 356—362 dieses Bandes. Sch.

von z unabhängige Werthe $y = \eta$, und, als Function von z auf- [10
gefasst, nur für von y unabhängige Werthe $z = \xi$.

Nach Satz II. No. 3 meiner citirten Arbeit*) sind η und ξ Integrale der Gleichung (2.), wenn man resp. y als Function von z und z als Function von y betrachtet. Da aber η von z und ξ von y unabhängig ist, so folgt

$$(4.) \qquad \begin{cases} \frac{d\eta}{dz} = 0, \\ \frac{d\xi}{dy} = 0, \end{cases}$$

d. h. die Werthe $y = \eta$ und die Werthe $z = \xi$, für welche $\frac{dy}{dz}$ sich bezüglich verzweigt, je nachdem dasselbe als Function von y oder als Function von z aufgefasst wird, sind resp. Wurzeln der Gleichung

$$(5.) \qquad \psi_{2m}(y) = 0,$$

$$(6.) \qquad \varphi_{2m}(z) = 0.$$

Findet für $y = \eta$ eine $(\alpha-1)$-fache Verzweigung von $\frac{dy}{dz}$ als Function von y statt, so muss nach Satz III. No. 3 meiner oben citirten Arbeit (da in der Gleichung (E.) daselbst $\zeta = 0$ zu setzen ist und dieselbe demzufolge in unsere Gleichung (5.) übergeht) $y = \eta$ mindestens eine $(\alpha-1)$-fache Wurzel der Gleichung (5.) sein. Findet ebenso für $z = \xi$ eine $(\beta-1)$-fache Verzweigung für $\frac{dz}{dy}$ als Function von z statt, so ist aus demselben Grunde ξ mindestens eine $(\beta-1)$-fache Wurzel der Gleichung (6.). Es folgt hieraus, dass die Anzahl der Verzweigungen von $\frac{dy}{dz}$, sowohl wenn dasselbe als Function von y, als auch wenn es als Function von z aufgefasst wird, nicht grösser als $2m$ ist. Nach einer von RIEMANN**) herrührenden Relation zwischen der Anzahl der Verzweigungen einer algebraischen Function, dem Grade der Gleichung, welcher sie genügt, und ihrem Range, ergiebt sich demnach, dass $\frac{dy}{dz}$ vom Range Null oder Eins ist, ebensowohl wenn dasselbe als Function von y, als

*) Sitzungsberichte, 1884, S. 704[1]).

**) BORCHARDTS Journal, Bd. 54, S. 129[2]).

[1]) Abh. XLIII, S. 361 dieses Bandes. Sch.

[2]) Riemanns Werke (1902), S. 114. Sch.

auch wenn es als Function von z aufgefasst wird. Die vorhergehende Untersuchung führt also zu dem Resultat:

11] Wenn die Differentialgleichung (1.) in Bezug auf ihre Argumente algebraisch ist und die Eigenschaft besitzt, dass die Verzweigungspunkte der Integrale derselben sich nicht mit den Anfangswerthen stetig verschieben, sei es, dass man y als Function von z, sei es, dass man z als Function von y betrachtet, so ist die algebraische Function $\frac{dy}{dz}$ von y ebenso wie die algebraische Function $\frac{dz}{dy}$ von z vom Range Null oder Eins.

Man kann nun nach den Principien meiner oben citirten Arbeit No. 6 bis 7 zeigen, dass alsdann das Integral y der Gleichung (2.) eine analytische Function von z darstellt.

4.

Von den Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale mit den Anfangswerthen stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, hat man nun zunächst diejenigen auszuscheiden, welche durch eine algebraische Transformation in eine Differentialgleichung übergeführt werden können, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte haben. Denn so wie es einleuchtend ist, dass man Differentialgleichungen der letzteren Art durch eine willkürliche algebraische Transformation in solche der ersteren Art umwandeln kann, so ergiebt sich auch, dass, wenn eine Differentialgleichung der ersteren Art in eine solche der letzteren Art algebraisch umgeformt werden kann, dieselbe nicht zu wesentlich anderen Transcendenten führt, wie die Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten.

Für die Differentialgleichungen dagegen, für welche der Rang der durch dieselben definirten Function $\frac{dy}{dz}$ entweder als Function von y oder als Function von z die Einheit übersteigt, und welche nicht algebraisch transformirbar sind in andere Differentialgleichungen, deren Integrale sich nur in festen Punkten verzweigen, ist zu untersuchen, ob diejenigen Werthe von y, welche ein und demselben willkürlichen Werthe von z entsprechen, resp. diejenigen Werthe von z, welche ein und demselben willkürlichen Werthe von y entsprechen, wie in dem in No. 2 gegebenen Beispiele, eine oder mehrere

Flächen stetig bedecken, oder in endlicher oder unendlicher Anzahl sich in discreten Punkten über die Ebene vertheilen.

Im ersteren Falle wird durch die Differentialgleichung y [12] ebenso wenig als analytische Function von z bestimmt, wie die obere Grenze eines einzigen ABELschen Integrals erster Gattung als analytische Function des Integralwerthes aufzufassen ist.

ANMERKUNGEN.

1) Änderung gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 383, Zeile 15 wo statt und,

„ 386, „ 9, 8 v. u. durch (3.) definirten algebraischen Function statt algebraischen Function (3.).

2) Der Begriff »analytische Function« ist in der vorstehenden Abhandlung (wie auch in den Abhandlungen XXX ff. vergl. die Anmerkung zur Abh. XXXI, S. 212 dieses Bandes) in dem JACOBI eigenthümlichen Sinne zu nehmen. Auch im übrigen lehnt sich die von FUCHS hier angewandte Terminologie an die von JACOBI im 13. Bande des Journals f. d. r. u. a. Mathematik benutzte an, tritt aber in manchen Wendungen aus dem wohl umgrenzten Rahmen der JACOBIschen hinaus und kann durch eben diese Wendungen leicht zu Missverständnissen Veranlassung geben. Während der Ausdrucksweise S. 381, Zeile 5—7 des Textes »als jedem Werthe der letzteren Grösse jeder Werth der ersteren entspricht, und umgekehrt« nach JACOBI (a. a. O., Werke, Bd. II, S. 43) die Bedeutung beigelegt werden muss, dass für jeden Werth der einen Grösse die andere jedem Werthe beliebig nahe kommen kann, entspricht die Anwendung des Gleichheitszeichens in den Gleichungen (10.) No. 1 und (4.) No. 2 keineswegs der üblichen Bedeutung dieses Zeichens, indem jene Gleichungen durch ganzzahlige Werthe der k, l, m nicht exact, sondern nur mit beliebiger Annäherung befriedigt werden können. Die Worte S. 382, Zeile 8 »keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes« und S. 385, vorletzte und letzte Zeile »keine analytische Beziehung« sind so zu verstehen, dass die Beziehung keine derartige ist, dass die eine Grösse als analytische Function der andern im Sinne JACOBIS erscheint. Endlich müssten im Sinne der modernen Terminologie S. 389, Zeile 1, 2 die Worte »stetig« durch »überall dicht« und »discreten« durch »isolirten« ersetzt werden. —

Vergl. den Aufsatz von CASORATI, Acta Mathematica, Band 8, 1886, S. 345 ff. SCH.

XLVII.

ÜBER DIE WERTHE, WELCHE DIE INTEGRALE EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG IN SINGULÄREN PUNKTEN ANNEHMEN KÖNNEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1886, XIV, S. 279—300; vorgetragen am 11. März, ausgegeben am 18. März 1886.)

In ihrer berühmten Abhandlung*) haben BRIOT und BOUQUET, nach- [279
dem sie nach dem Vorgange von CAUCHY die Integrale einer Differentialgleichung

$$(\alpha.) \qquad \frac{dy}{dz} = f(z, y)$$

definirt, das Verhalten derselben in der Umgebung einer Stelle (z_0, y_0), in welcher $f(z, y)$ entweder unendlich oder mehrdeutig oder endlich unbestimmt wird, einer eingehenden Untersuchung unterworfen.

Ein sorgfältiges Studium dieser Abhandlung, welcher ich schon vor langer Zeit die Anregung zur Beschäftigung mit der Theorie der Differentialgleichungen zu verdanken hatte, hat mich erkennen lassen, dass in den Entwickelungen von BRIOT und BOUQUET manche Lücke auszufüllen sei, und dass manche Resultate einer Ergänzung bedürfen.

In dem Folgenden erlaube ich mir, einen Auszug aus den Erwägungen zu geben, zu welchen mich meine Studien über diesen Gegenstand geführt haben.

---

*) Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, p. 133.

Schon bei der Definition der Integrale begegnet man einer Lücke. Sind nämlich die Anfangswerthe (z_0, y_0) so beschaffen, dass $f(z, y)$ und alle partiellen Ableitungen dieser Functionen nach z für $z = z_0$, $y = y_0$ verschwinden, dass mit anderen Worten (α.) die Form

(β.) $$\frac{dy}{dz} = (y - y_0)^m f_1(z, y)$$

erhält, so ist der Nachweis der Existenz eines Integrals nicht erbracht.

Diese Frage ist offenbar mit der anderen identisch: wie verhalten sich die Integrale einer Differentialgleichung

(γ.) $$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z^k} F(z, y)$$

in der Umgebung von $z = 0$?

280] Auch diese Frage ist unerledigt geblieben. Mit ihrer Lösung würden aber zu gleicher Zeit die Principien gewonnen sein, um die Schwierigkeiten zu heben, welche in der Behandlung derjenigen singulären Stellen, für welche $f(z, y)$ unbestimmt wird, auftreten.

Für diese singulären Stellen führen Briot und Bouquet durch eine Transformation die Gleichung (α.) auf einen der drei Typen

(δ.) $$t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \mathfrak{P}(t, \zeta),$$

(ε.) $$t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta^m + bt + \mathfrak{P}(t, \zeta),$$

(ζ.) $$t^m\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \mathfrak{P}(t, \zeta)$$

zurück, worin $\mathfrak{P}(t, \zeta)$ eine nach positiven ganzen Potenzen der Variabelen t, ζ fortschreitende Reihe bedeutet, in welcher die Glieder niedrigster Dimension die der zweiten sind.

Allein diese Zurückführung setzt stillschweigend voraus, dass, wenn z einen Werth a und gleichzeitig y einen Werth b erreicht, von der Beschaffenheit, dass $f(a, b)$ unbestimmt wird, der Punkt $z = a$ nicht ein solcher ist, für welchen y als Function von z überhaupt unbestimmt wird. Man würde, wenn dieses einträte, die Reihenentwickelungen, welche zu den drei genannten Typen führen, nicht machen dürfen, man würde vielmehr stets zuerst eine Gleichung der Form (γ.) erhalten, und nur in denjenigen Fällen, wo die Integrale der

letzteren in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, wird der Übergang zu den genannten Typen statthaft sein.

Dass übrigens die Untersuchung der Singularität $z = 0$ in einer Gleichung von der Form $(\gamma.)$ nicht eine in dem Gebiete der analytischen Functionen abseits gelegene Frage betrifft, ergiebt sich eben aus der Identität dieser Untersuchung mit derjenigen der Gleichung $(\beta.)$. Man erkennt aber schon an einfachen Beispielen, wie z. B. an dem Falle $f_1(z, y) = \frac{1}{z}$, dass man einer Definition der Integrale der Gleichungen der Form $(\beta.)$ nicht entrathen kann.

Aber noch nach einer anderen Seite hin tritt die Bedeutung der Untersuchung der Gleichungen der Formen $(\beta.)$, $(\gamma.)$ heraus. Wenn nämlich ein Integral der Gleichung $(\alpha.)$ durch gewisse Anfangswerthe (z_0, y_0) definirt worden ist, so ist es von Wichtigkeit festzustellen, ob dasselbe das einzige ist, welches diesen Anfangsbedingungen genügt, oder nicht. Um nachzuweisen, dass es nur ein solches Integral gebe, bedürfen Briot und Bouquet des Schlusses*), dass ein Integral einer Gleichung der Form $(\beta.)$, welches für $z = z_0$ den Werth [281 $y = y_0$ annimmt, identisch gleich dem constanten Werthe y_0 sei. Da aber, wie gezeigt werden soll, es im Allgemeinen ausser $y = y_0$ noch andere Integrale der Gleichung $(\beta.)$ giebt, so giebt es im Allgemeinen auch mehr als ein Integral der Gleichung $(\alpha.)$, welches gegebenen Anfangsbedingungen entspricht.

Im Folgenden werde ich mich darauf beschränken, die Singularitäten $z = 0$ in Gleichungen der Form $(\gamma.)$ einer näheren Untersuchung zu unterziehen und damit die Discussion der zuletzt erwähnten Frage über die Bestimmung eines Integrals durch vorgeschriebene Anfangswerthe zu verbinden.

1.

Wir wollen zuerst einige Benennungen hervorheben, deren wir für die Folge bedürfen. Die Bezeichnungen der singulären Punkte als wesentliche und ausserwesentliche, welche Herr Weierstrass für die eindeutigen Functionen einer complexen Variabelen eingeführt hat, sind für die mehrdeutigen Functionen nicht ausreichend, weil selbst diejenigen Stellen einer Function, für welche dieselbe zwar bestimmte, von den letzten Wegelementen, auf welchen man in dieselben gelangt, unabhängige Werthe erhält, deren Umkreisung aber

*) A. a. O. p. 145.

zu anderen Functionswerthen führt, nicht auf dieselbe Weise aufhebbar sind, wie die ausserwesentlich singulären Punkte einer eindeutigen Function.

Wir wollen daher eine Stelle, in welcher eine Function eine von den letzten Wegelementen abhängige Werthenreihe annehmen kann, eine Stelle oder einen Punkt der Unbestimmtheit nennen. Diese Benennung drückt eben die Natur der Stelle, dass die Function in ihr nicht einen bestimmten Werth erhalte, aus.

Ein Punkt der Unbestimmtheit kann zu gleicher Zeit ein Verzweigungspunkt sein oder auch nicht. Aber die Verzweigung in einem solchen Punkte kann von zweierlei Art sein.

Ist nämlich a ein Punkt der Unbestimmtheit, so kann es möglich sein, dass man a durch eine geschlossene Curve von hinlänglich kleinen aber endlichen Dimensionen von der Art abgrenzen kann, dass innerhalb derselben ausser dem Punkte a selbst kein Verzweigungspunkt enthalten ist. Wir wollen alsdann die Verzweigung eine bestimmte nennen. So ist in der Function $(z-a)^\lambda \varphi(z)$, in welcher $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ eindeutig aber in $z = a$ unbestimmt ist, und wo λ eine beliebige reale Grösse bedeutet, a ein Punkt der Unbestimmtheit, aber mit bestimmter Verzweigung.

282] Es kann aber zweitens möglich sein, dass, wie klein auch die Curve, durch welche a abgegrenzt wird, sein mag, immer in der Fläche derselben unzählig viele Stellen ausser a vorhanden sind, in welchen Verzweigung stattfindet. Alsdann wollen wir die Verzweigung eine unbestimmte nennen. In der Function

$$\sqrt[m]{e^{\frac{1}{z-a}} - b}$$

z. B., wo b eine von Null verschiedene Constante und m eine positive ganze Zahl bedeutet, ist $z = a$ ein Punkt der Unbestimmtheit, in welchem zugleich eine unbestimmte Verzweigung statt hat.

Es sei nämlich $e^{\frac{1}{\zeta-a}} = b$; alsdann liefert die Gleichung

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{\zeta-a} + 2k\pi i$$

für die unendliche Reihe der realen ganzen Zahlen k eine unendliche Reihe

von Stellen z, welche sämmtlich so beschaffen sind, dass $e^{\frac{1}{z-a}} = b$, und wovon eine unendlich grosse Anzahl von a verschiedener, innerhalb eines noch so kleinen diesen Punkt umschliessenden Bereiches sich befinden. In jedem dieser Punkte findet aber Verzweigung statt.

Es ist im Allgemeinen nicht möglich, eine Function durch eine in der ganzen Umgebung eines Punktes a der Unbestimmtheit mit unbestimmter Verzweigung gültige nach irgend welchen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darzustellen.

Dieser Umstand tritt jedoch schon für Stellen der Unbestimmtheit ein, in deren Umgebung keine Verzweigung statt hat. — So würde z. B. die Function

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{z-a}} - b}$$

zwar innerhalb eines von zwei Kreisen mit dem Mittelpunkte a gebildeten Ringes, innerhalb dessen nicht eine Wurzel der Gleichung

$$e^{\frac{1}{z-a}} - b = 0$$

gelegen ist, mit Hülfe des LAURENTschen Satzes nach positiven und negativen Potenzen von $z-a$ entwickelbar sein. Aber diese Entwickelung gilt nicht bis zu beliebiger Annäherung an den Punkt a.

An das Vorhergehende knüpft sich eine für die Theorie der Differentialgleichungen folgenreiche Erwägung. — Da nämlich für nicht lineare Differentialgleichungen die sämmtlichen hier näher bezeichneten Singularitäten [283 auftreten, so wird man in der Regel darauf verzichten müssen, von dem gewöhnlichen Hülfsmittel Gebrauch zu machen, wonach die Natur der Singularität durch eine in der Umgebung der singulären Stelle gültige Reihenentwickelung erforscht wird. — Man wird vielmehr zu anderen Hülfsmitteln seine Zuflucht nehmen müssen, um den ganzen Werthvorrath, dessen die Function in der Umgebung einer singulären Stelle fähig ist, zu ergründen.

2.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z^k} F(z, y),$$

worin $F(z,y)$ eine in dem ganzen Verlaufe der unabhängigen Variabelen z,y definirte Function und k eine ganze, positive Zahl bedeutet.

Wir haben zunächst zu untersuchen, ob $z=0$ für die Integrale y der Gleichung (A.) ein Punkt der Unbestimmtheit ist. — Wenn dieses stattfindet, so kann für $z=0$ y Werthe erlangen, für welche $F(z,y)$ als Function von z und y keine Singularität darbietet. Ist p ein solcher Werth, und ist in der Umgebung von $z=0$, $y=p$

$$\frac{1}{F(z,y)} = \alpha_0 + \alpha_1(y-p) + \beta_1 z + \cdots,$$

so ist es nicht zulässig, aus der Gleichung

$$(\alpha.) \qquad \frac{dz}{dy} = z^k\{\alpha_0 + \alpha_1(y-p) + \beta_1 z + \cdots\},$$

wie es Briot und Bouquet*) thun, zu schliessen, dass z als Function von y für $y=p$ den Werth $z=0$ nicht erreichen könne. In der That würde ein solcher Schluss die Voraussetzung enthalten, dass y längs eines Weges von endlicher Länge von einem Werthe y_0 zu dem Werth p gelangen müsste, wenn gleichzeitig z von einem der Null naheliegenden Werthe $z=z_0$ in $z=0$ einrückt. — Ist aber $z=0$ ein Punkt der Unbestimmtheit, so sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt. Es kann alsdann vielmehr y von einem Werthe y_0 zu einem beliebig weit davon entfernten Werthe p übergehen, während z in beliebiger Nähe von $z=0$ verbleibt. — Man darf aber dann nicht zur 284] Feststellung des Zusammenhanges zwischen z und y, $F(z,y)$ in der Umgebung von $z=0$ und in der Umgebung eines **bestimmten** Werthes $y=p$ entwickeln, wie es die Herstellung der Gleichung ($\alpha.$) voraussetzt.

Zur Entscheidung der Frage, ob $z=0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (A.) sei, könnte man eine Function t von z, welche in $z=0$ einen Punkt der Unbestimmtheit besitzt, einführen und alsdann die Integrale y als Functionen von t untersuchen. So würde, was das Nächstliegende ist, in dem Falle, dass $k>1$, die Function

$$(B.) \qquad t = e^{\frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}}}$$

*) A. a. O. p. 145 bei einer ähnlichen Gleichung, deren sie sich zum Nachweis der eindeutigen Bestimmung eines Integrals bedienen, worauf wir später noch zurückkommen werden.

$z = 0$ als Punkt der Unbestimmtheit besitzen, und wenn man in Gleichung (A.) t als unabhängige Variabele einführt, dieselbe in

$$\text{(C.)} \qquad \frac{dy}{dt} t = F(z, y)$$

übergehen, in welcher z mit t durch die Gleichung (B.) verbunden gedacht wird.

Es lässt sich nun zeigen, dass im Allgemeinen den verschiedenen Werthen von t in der Umgebung von $z = 0$ auch theilweise oder durchweg verschiedene Werthe von y entsprechen können. — Ich behalte mir die Ausführung dieses Nachweises für eine andere Gelegenheit vor und will mich an dieser Stelle damit begnügen, nur einen Weg, auf welchem man zu demselben gelangen kann, hier anzudeuten, da derselbe auch in anderer Hinsicht für das Studium der Integrale einer Differentialgleichung beachtenswerth erscheint.

Es sei M ein Multiplicator der Gleichung

$$\text{(1.)} \qquad P dy + Q dz = 0,$$

wo P, Q wohldefinirte Functionen der beiden Variabelen y, z sind. Man hat alsdann für die Function M der beiden unabhängigen Variabelen y, z die Gleichung

$$\text{(2.)} \qquad Q \frac{\partial \log M}{\partial y} - P \frac{\partial \log M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Sind M_1, M_2 zwei Lösungen dieser Gleichung, so folgt, wenn man

$$\text{(3.)} \qquad \log \frac{M_1}{M_2} = u$$

setzt,

$$\text{(4.)} \qquad Q \frac{\partial u}{\partial y} - P \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Ist $u = \Phi(z, y)$ eine Lösung dieser Gleichung, so liefert bekanntlich [285 die durch die Gleichung

$$\text{(5.)} \qquad \Phi(z, y) = \mu,$$

wo μ eine beliebige Constante, definirte Function y von z ein Integral der Gleichung (1.). Es ist auch bekannt, wie umgekehrt die Integration der Gleichung (4.) auf die Lösung der Gleichung (1.) zurückgeführt wird.

Auf unsere Gleichung (A.) angewendet geht die Gleichung (4.) über in:

$$z^k \frac{\partial u}{\partial z} + F(z, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{6.}$$

Statt dieser Gleichung betrachten wir die folgende:

$$t \frac{\partial v}{\partial t} + z^k \frac{\partial v}{\partial z} + F(z, y) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{D.}$$

Ist $\Psi(t, z, y)$ eine Function der drei unabhängigen Variabelen, welche der Gleichung (D.) genügt, so erhält bekanntlich Ψ einen constanten Werth, wenn t mit z durch die Gleichung

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z^k}{t}, \tag{7.}$$

welche mit (B.) identisch ist, und y mit z durch die Gleichung (A.) verbunden ist.

Wenn aber y unbeschränkt veränderlich belassen wird, dagegen t mit z durch die Gleichung (7.) oder (B.) verbunden ist, so wird Ψ ein Integral der Gleichung (6.).

Es sei demgemäss $\Psi(t, z, y)$ eine wohldefinirte Function der drei unabhängigen Variabelen t, z, y, welche der Gleichung (D.) genügt, so werde die Gleichung

$$\Psi(t, z, y) = \mu, \tag{E.}$$

wo μ eine Constante, der Untersuchung zu Grunde gelegt. Wird in derselben t als mit z nach Gleichung (B.) sich verändernd aufgefasst, so ist die durch dieselbe gelieferte Function y von z ein Integral der Gleichung (A.).

Es ergiebt sich, dass im Allgemeinen, wenn z gegen Null convergirt und gleichzeitig t die entsprechende, durch die Gleichung (B.) gelieferte Werthenreihe durchläuft, sich aus Gleichung (E.) für y unendlich viele von der Art, wie z sich der Null annähert, abhängige Werthe ergeben.

Die Untersuchung lässt sich durchführen, indem man für unbeschränkt 286] veränderliche Werthe der Variabelen t, z, y die Function Ψ auf geeignete Weise, z. B. als Potenzreihe oder als Quotienten zweier Potenzreihen, in der Umgebung von $z = 0$ und passender besonderer Werthe von t und y darstellt. Lässt man alsdann z gegen Null convergiren und mit ihm t eine Werthen-

reihe durchlaufen, welche sich aus Gleichung (B.) ergiebt und dem Darstellungsgebiete angehört, so wird zu entscheiden sein, ob es ebenfalls dem Darstellungsgebiete angehörige Werthe von y giebt, welche mit t und z zusammen der Gleichung (E.) genügen.

Während demnach für das allgemeine Integral $z = 0$ in der Regel ein Punkt der Unbestimmtheit ist, kann es wohl eintreten, dass für ein besonderes Integral oder, was dasselbe ist, für bestimmte Werthe von μ in Gleichung (E.), $z = 0$ aufhört, ein Punkt der Unbestimmtheit zu sein.

Es ist selbstverständlich, dass die Gleichung (A.) auch die besondere Beschaffenheit besitzen kann, dass ihre sämmtlichen Integrale in $z = 0$ nicht unbestimmt werden.

3.

Häufig ist es zweckmässiger, an die Stelle der Hülfsfunction t eine andere η zu setzen, welche mit z durch die Gleichung

$$\text{(B'.)} \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{z^k} F(0, \eta)$$

verbunden ist.

Es habe zum Beispiel $F(z, y)$ die Form

$$\text{(1.)} \qquad F(z, y) = \frac{G(y) + z H(z, y)}{G_1(y) + z H_1(z, y)},$$

wo $G(y)$, $G_1(y)$ ganze rationale Functionen von y, H und H_1 wohldefinirte Functionen von z und y von der Beschaffenheit, dass $H(0, y)$, $H_1(0, y)$ nicht für beliebige Werthe von y unendlich werden.

Alsdann wird die Gleichung (B'.):

$$\text{(2.)} \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{z^k} \frac{G(\eta)}{G_1(\eta)},$$

deren Integration entweder

$$\text{(3.)} \qquad \frac{1}{1-k} \frac{1}{z^{k-1}} = \int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)} d\eta$$

oder

$$\text{(3a.)} \qquad \log z = \int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)} d\eta$$

liefert, je nachdem $k \gtrless 1$.

287] Die Gleichung (A.) geht durch Einführung der unabhängigen Variabelen η über in

$$\frac{dy}{d\eta} F(0, \eta) = F(z, y), \tag{C'.}$$

in welcher z durch die Gleichung (B'.) mit η verbunden gedacht wird.

Es lässt sich nun wiederum zeigen, dass, wenn für einen beliebigen Werth von η die durch die Gleichung (B'.) damit verbundene Grösse z sich der Null nähern kann, im Allgemeinen $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit der Integrale der Gleichung (A.) sein muss.

Für die besondere Form (1.) ergiebt die Gleichung (3.) allemal $z = 0$ als zu einem beliebigen Werthe η gehörig, wenn

$$\int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)} d\eta$$

mit Logarithmen behaftet ist. Tritt z. B. das Glied

$$A \log (\eta - a)$$

auf, so wird die rechte Seite der Gleichung (3.) für einen beliebigen Werth von η unendlich gross, wenn η unzählig viele Umläufe um a vollzieht.

Wenn

$$\int \frac{G_1(\eta)}{G(\eta)} d\eta$$

mit Logarithmen behaftet ist, so folgt aus (3a.)

$$z = \gamma (\eta - a)^A (\eta - b)^B \dots e^{R(\eta)}, \tag{4.}$$

wo γ eine willkürliche Constante, $A, B, \dots$ die Residuen von $\frac{G_1(\eta)}{G(\eta)}$ in Bezug auf die Werthe η, für welche $G(\eta) = 0$, und endlich $R(\eta)$ eine rationale Function von η bedeutet. Nach einem Umlaufe um $\eta = a$ geht z in jz über, wo $j = e^{2\pi i A}$. Wenn demnach der Coefficient von i in der Grösse A nicht verschwindet, so werden unzählig viele Umdrehungen um $\eta = a$, nach dem einen oder nach dem entgegengesetzten Sinne ausgeführt, zu dem willkürlichen, in der Umgebung von $\eta = a$ gelegenen Werthe η als zugehörigen Werth $z = 0$ liefern.

Wie in voriger Nummer kann die Untersuchung der Gleichung (C'.) vermittelst der partiellen Differentialgleichung

$$(D'.) \qquad F(0,\eta)\frac{\partial v}{\partial \eta} + z^k \frac{\partial v}{\partial z} + F(z,y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

erfolgen, deren Lösungen $\Psi(\eta, z, y)$ die Eigenschaft besitzen, einen constanten Werth zu erhalten, wenn z sich mit η nach Gleichung (C'.) und y mit z [288 nach Gleichung (A.) ändert. Man muss wie dort die Gleichung

$$(E'.) \qquad \Psi(\eta, z, y) = \mu,$$

wo μ eine Constante bedeutet, zu Grunde legen.

Dass auch hier der Fall eintreten kann, dass, während das allgemeine Integral von (A.) in $z = 0$ unbestimmt wird, sobald $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit der durch Gleichung (B'.) definirten Function η von z ist, besondere Integrale in $z = 0$ nicht mehr unbestimmt werden, ist selbstverständlich.

Aber was wesentlich zu beachten ist, das ist der Umstand, dass auch in dem Falle, dass $z = 0$ für die durch Gleichung (B'.) definirte Function η von z nicht ein Punkt der Unbestimmtheit ist, dennoch für die Integrale der Gleichung (A.) $z = 0$ ein solcher Punkt sein kann, wie dieses ja aus der vorigen Nummer für $k > 1$ erhellt.

4.

Wir wollen das Vorhergehende an einigen Beispielen erläutern. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad z^k \frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2,$$

worin p_0, p_1, p_2 in der Umgebung von $z = 0$ eindeutige und continuirliche Functionen bedeuten.

Setzen wir

$$(2.) \qquad y = -\frac{z^k}{p_2}\frac{d\log w}{dz},$$

so genügt w der Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} - \left[\frac{p_1}{z^k} - \frac{k}{z} + \frac{d\log p_2}{dz}\right]\frac{dw}{dz} + \frac{p_0 p_2}{z^{2k}} w = 0.$$

Es sei

$$k > 1, \tag{I.}$$

alsdann ist*) der Punkt $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral der Gleichung (3.).

Ist w_1, w_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (3.), c_1, c_2 willkürliche Constanten, so hat nach Gleichung (2.) das allgemeine Integral der Gleichung (1.) die Form

$$y = -\frac{z^k}{p_2}\left(c_1\frac{dw_1}{dz} + c_2\frac{dw_2}{dz}\right)\frac{1}{c_1 w_1 + c_2 w_2}. \tag{4.}$$

289] Daher ist auch im Allgemeinen $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für jedes Integral der Gleichung (1.).

Es kann aber eintreten, dass ein besonderes Integral w so beschaffen ist, dass seine logarithmische Ableitung in $z = 0$ nicht unbestimmt wird. Diesem entspricht alsdann nach Gleichung (2.) ein besonderes Integral y der Gleichung (1.), für welches $z = 0$ nicht Punkt der Unbestimmtheit ist.

Soll aber das allgemeine Integral der Gleichung (1.) in $z = 0$ nicht unbestimmt sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass

$$w_1 = e^{\int \varphi_1 dz}, \quad w_2 = e^{\int \varphi_2 dz},$$

wo φ_1, φ_2 in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, und dass zu gleicher Zeit für $\frac{w_2}{w_1}$ $z = 0$ nicht Punkt der Unbestimmtheit ist.

Da**)

$$\frac{w_2}{w_1} = C\int e^{\int\left(\frac{p_1}{z^k} - \frac{k}{z} + \frac{d\log p_2}{dz}\right)dz}\frac{dz}{w_1^2},$$

so sind diese Bedingungen auch gleichbedeutend mit den beiden folgenden:

$$\varphi_1 \text{ und } e^{\int\left(\frac{p_1}{z^k} - 2\varphi_1\right)dz}$$

dürfen für $z = 0$ nicht unbestimmt werden.

*) Nach meiner Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 146[1]).

**) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 128—130[2]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

[2]) Ebenda S. 166—169. Sch.

Man kann immer*) das Fundamentalsystem von Integralen w_1, w_2 der Gleichung (3.) so einrichten, dass in der Umgebung von $z = 0$ entweder

$$w_1 = z^{r_1}\psi_1, \quad w_2 = z^{r_2}\psi_2 \tag{5.}$$

oder

$$w_1 = z^{r_2}\psi, \quad w_2 = z^{r_2-g}(\chi + z^g\psi \log z), \tag{5a.}$$

wo r_1, r_2 bestimmte reale oder complexe Grössen, g eine ganze positive Zahl, ψ_1, ψ_2, respective ψ und χ Reihen bedeuten, welche im Allgemeinen eine unendliche Anzahl negativer und positiver ganzzahliger Potenzen von z enthalten.

Da $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral der Gleichung (3.) ist, so muss im Falle (5.) wenigstens eine der Reihen ψ_1, ψ_2 und im Falle (5a.) wenigstens eine der Reihen ψ, χ eine unendliche Anzahl negativer Potenzen von z enthalten.

Soll das allgemeine Integral der Gleichung (1.) in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, so muss den oben gefundenen Bedingungen zufolge, unter Berück- [290 sichtigung der Gleichungen (5.) und (5a.), entweder die logarithmische Ableitung von ψ_1 oder von ψ eine Function φ von der Beschaffenheit sein, dass 2φ in der Umgebung von $z = 0$ sich durch eine nach steigenden ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe darstellen lässt, welche nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen hat, und dass zu gleicher Zeit die Coefficienten der Potenzen, deren Exponenten kleiner als die negative Einheit, mit den Coefficienten der entsprechenden Potenzen von $\frac{p_1}{z^k}$ übereinstimmen.

Wir können voraussetzen, dass p_0, p_1, p_2 für $z = 0$ nicht verschwinden. Denn wenn eine oder zwei dieser Grössen für $z = 0$ verschwinden sollten, so würde die Substitution

$$y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürliche Grössen, in Gleichung (1.) für u eine Differentialgleichung liefern, in welcher die p_0, p_1, p_2 entsprechenden Grössen für $z = 0$ nicht verschwinden. Aber u hat mit y für $z = 0$ dieselbe Verzweigung, und es ist $z = 0$ gleichzeitig für u und y ein Punkt der Unbestimmtheit.

*) Nach meiner Arbeit in BORCHARDTs Journal, Bd. 66, S. 131–139 [1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 170–178. Sch.

Sei unter dieser Voraussetzung

$$(6.)\qquad \begin{cases} \frac{p_0}{z^k} = \frac{A_0}{z^k} + \frac{A_1}{z^{k-1}} + \cdots, \\ \frac{p_1}{z^k} = \frac{B_0}{z^k} + \frac{B_1}{z^{k-1}} + \cdots, \\ \frac{p_2}{z^k} = \frac{C_0}{z^k} + \frac{C_1}{z^{k-1}} + \cdots, \end{cases}$$

so sind A_0, B_0, C_0 von Null verschieden.

Es sei

$$(7.)\qquad y = -\frac{z^k}{p_2} v,$$

so genügt v der Gleichung

$$(8.)\qquad \frac{dv}{dz} = -\frac{p_0 p_2}{z^k} + \left[-\frac{k}{z} + \frac{p_1}{z^k} + \frac{d\log p_2}{dz}\right] v - v^2.$$

Sollte $z = 0$ für die Integrale der Gleichung (1.) nicht ein Punkt der Unbestimmtheit sein, so müsste nach dem Obigen die Gleichung (8.) ein Integral besitzen, welches in der Umgebung von $z = 0$ die Form hätte:

$$(9.)\qquad v = \frac{1}{2}\frac{B_0}{z^k} + \frac{1}{2}\frac{B_1}{z^{k-1}} + \cdots.$$

291] Substituirt man diesen Ausdruck in (8.), so folgt durch Vergleichung der Coefficienten von z^{-2k} auf beiden Seiten

$$(10.)\qquad -A_0 C_0 + \tfrac{1}{2} B_0^2 = 0.$$

Sollen demnach die sämmtlichen Integrale der Gleichung (1.) in $z = 0$ nicht unbestimmt werden, so muss

$$A_0 + B_0 y + C_0 y^2$$

ein vollständiges Quadrat sein.

Dieses Resultat findet seine Aufklärung durch die Untersuchungen in No. 3. In der That ist in unserem Falle

$$(11.)\qquad G(y) = A_0 + B_0 y + C_0 y^2,$$

und aus der Gleichung

$$(12.)\qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{G(\eta)}{z^k}$$

ergiebt sich, wenn die Wurzeln a_1, a_2 der Gleichung $G(\eta) = 0$ von einander verschieden sind,

$$\frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}} = \frac{1}{C_0(a_1-a_2)}\log\left(\frac{\eta-a_1}{\eta-a_2}\right) + \text{const.} \tag{13.}$$

Es wird daher für einen beliebigen Werth von η, nach unzählig vielen Umläufen dieser Variabelen um den Punkt a_1 oder a_2, z gegen Null convergiren und gleichzeitig das Integral y der Gleichung

$$\frac{dy}{d\eta}G(\eta) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2, \tag{14.}$$

in welche (1.) übergeht, wenn man an die Stelle von z η als unabhängige Variabele einführt, für die verschiedenen Werthe von η, welche zu $z = 0$ gehören, im Allgemeinen verschiedene Werthe annehmen, oder mit anderen Worten, es wird das Integral y der Gleichung (1.) jeden möglichen Werth annehmen, wenn z auf geeigneten Wegen in $z = 0$ einrückt, d. h. $z = 0$ ist ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral von (1.).

Sind dagegen die Wurzeln a_1, a_2 der Gleichung $G(y) = 0$ einander gleich, so liefert die Integration der Gleichung (12.)

$$\frac{1}{1-k}\frac{1}{z^{k-1}} = -\frac{1}{C_0}\frac{1}{\eta-a_1} + \text{const.} \tag{15.}$$

Dieser Gleichung gemäss wird z nur für $\eta = a_1$ Null; demnach ist es alsdann auch nicht erforderlich, dass $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (1.) werde.

Es ist aber selbstverständlich, dass die in Gleichung (10.) enthaltene Bedingung nicht die hinreichende dafür ist, dass alle Integrale der Glei- [292 chung (1.) in $z = 0$ bestimmt werden. In der That ist jene Bedingung nur eine derjenigen, welche erfüllt sein müssen, damit die Gleichung (8.) ein Integral der Form (9.) habe.

Es kann also $A_0 + B_0 y + C_0 y^2$ ein vollständiges Quadrat sein, ohne dass $z = 0$ aufhört ein Punkt der Unbestimmtheit für das allgemeine Integral der Gleichung (1.) zu sein.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung

$$z^k \frac{dy}{dz} = \alpha y^2 + \beta z, \tag{16.}$$

wo α, β Constanten bedeuten, so wird für diese die Gleichung (3.) in

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{k-1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta}{z^{2k-1}}w = 0 \tag{17.}$$

übergehen. Nach den oben gefundenen Bedingungen müsste diese, damit kein Integral der Gleichung (16.) $z = 0$ als Punkt der Unbestimmtheit besitze, durch ein Integral

$$w_1 = e^{\int \varphi\, dz}$$

befriedigt werden, für welches φz für $z = 0$ endlich und bestimmt, also w_1 selber in $z = 0$ bestimmt wäre. Da aber auch $\frac{w_2}{w_1}$ die gleiche Eigenschaft besitzen muss, so wäre auch w_2 für $z = 0$ bestimmt. Demnach dürfte $z = 0$ für die Integrale der Gleichung (17.) nicht ein Punkt der Unbestimmtheit sein, was aber der Voraussetzung widerspricht, wonach $k > 1$*).

Setzt man für w_1, w_2 die Werthe aus (5.) bez. (5a.) in Gleichung (4.) ein, so erhält man für y einen Ausdruck der Form

$$y = \frac{P + Qz^{r_2 - r_1}}{R + Sz^{r_2 - r_1}} \tag{18.}$$

bez. von der Form

$$y = \frac{P + Qz\log z}{R + Sz\log z}, \tag{18a.}$$

worin P, Q, R, S in der Umgebung von $z = 0$ eindeutig, aber im Allgemeinen in $z = 0$ unbestimmt sind. Hieraus geht hervor, dass das allgemeine Integral der Gleichung (1.) in $z = 0$ eine **bestimmte** Verzweigung erleidet.

Betrachten wir nunmehr den Fall

$$k = 1. \tag{II.}$$

293] In diesem Falle erhält die Gleichung (1.) die Form

$$z\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 \tag{19.}$$

*) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 146[1]).

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 186. Sch.

und die Gleichung (3.) die Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \left[\frac{p_1}{z} - \frac{1}{z} + \frac{d\log p_2}{dz}\right]\frac{dw}{dz} + \frac{p_0 p_2}{z^2}w = 0, \tag{20.}$$

und es ist*) $z = 0$ nicht ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (20.), folglich auch nicht für diejenigen der Gleichung (19.).

Behält man die Bezeichnungen des Falles (I.) bei, so bedeuten hier r_1, r_2 die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$r^2 - B_0 r + A_0 C_0 = 0^{**}), \tag{21.}$$

für den Fall, dass die Wurzeln dieser Gleichung nicht bloss um ganze Zahlen von einander verschieden sind; dagegen sind r_2 und $r_2 - g$ die Wurzeln derselben Gleichung, wenn sie nur um ganze Zahlen von einander verschieden sind. Wir wollen überdies im ersten Falle festsetzen, dass der reale Theil von r_2 nicht kleiner als der von r_1 sei.

Die Reihen ψ_1, ψ_2 bez. ψ und χ enthalten jetzt nur ganze positive Potenzen, und es sind $\psi_1(0), \psi_2(0), \psi(0), \chi(0)$ von Null verschieden.

In dem Falle, dass die Differenz $r_2 - r_1$ keine ganze Zahl, ist noch ein Unterschied zu machen, je nachdem

a) der reale Theil von $r_2 - r_1$ positiv oder

b) der reale Theil von $r_2 - r_1$ Null.

In dem Falle a) folgt aus (18.), dass das allgemeine Integral der Gleichung (19.) in der Umgebung von $z = 0$ die Form hat

$$y = \mathfrak{P}(z, z^{r_2 - r_1}), \tag{22.}$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von z, $z^{r_2 - r_1}$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Für $z = 0$ ergiebt sich aus (18.)

$$y = -\frac{r_1}{C_0}.$$

Setzt man in (21.)

$$r = -C_0 s,$$

*) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTs Journal, Bd. 66, S. 146.

**) Ebenda S. 147 und BORCHARDTs Journal, Bd. 68, S. 361[1]).

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 188 und Abh. VII, ebenda S. 213. Sch.

so erhält man die Gleichung

$$C_0 s^2 + B_0 s + A_0 = 0. \tag{21a.}$$

294] Man hat daher

$$A_0 + B_0 y + C_0 y^2 = C_0\left(y + \frac{r_1}{C_0}\right)\left(y + \frac{r_2}{C_0}\right). \tag{23.}$$

Für $y = -\frac{r_1}{C_0}$ erhält die rechte Seite der Gleichung (19.) die Form

$$\lambda\left(y + \frac{r_1}{C_0}\right) + \mathfrak{P}\left(y + \frac{r_1}{C_0}, z\right),$$

wo

$$\lambda = r_2 - r_1 \tag{24.}$$

und $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzen Potenzen von z und $y + \frac{r_1}{C_0}$ fortschreitende Reihe bedeutet.

In dem Falle b) ist für das allgemeine Integral der Gleichung (19.) der durch die Gleichung (18.) gegebene Ausdruck beizubehalten, in welchem jedoch jetzt P, Q, R, S nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihen bedeuten.

Es sei nunmehr die Differenz der Wurzeln der Gleichung (21.) eine ganze Zahl, diese Wurzeln also in der obigen Bezeichnung durch r_2, $r_2 - g$ dargestellt.

Es kann dann*) noch immer ein Fundamentalsystem w_1, w_2 von Integralen der Gleichung (20.) existiren, welches in der Umgebung von $z = 0$ die Form

$$w_1 = z^{r_2}\psi_1, \quad w_2 = z^{r_2 - g}\psi_2 \tag{25.}$$

hat, wo ψ_1, ψ_2 nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihen bedeuten.

In diesem Falle ist λ in Gleichung (24.) eine ganze positive Zahl, und in diesem Falle ist das allgemeine Integral der Gleichung (19.) der Form

$$y = \mathfrak{P}(z), \tag{26.}$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe bedeutet.

---

*) Siehe meine Arbeiten, BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 157 und Bd. 68, S. 376 ff.[1]).

---

[1]) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 196 und Abh. VII, ebenda S. 229 ff. Sch.

Wenn aber in der Umgebung von $z = 0$ die Darstellung (5a.) gilt, so folgt aus Gleichung (18a.), dass das allgemeine Integral y in der Umgebung von $z = 0$ die Form hat

$$y = \mathfrak{P}(z, z \log z), \tag{27.}$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von z, $z \log z$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Die Formeln (22.) und (27.) sind in Übereinstimmung mit den Re- [295 sultaten der Herren PICARD und POINCARÉ*), welche dieselben bei der Untersuchung der Gleichung

$$z \frac{du}{dz} = az + bu + \cdots$$

aus anderen Gesichtspunkten hergeleitet haben.

Wir wollen hier nur noch bemerken, dass, wenn der Coefficient von i in einer Grösse a nicht verschwindet, der Punkt $z = 0$ genau genommen als ein Punkt der Unbestimmtheit der Function z^a aufgefasst werden müsste. In der That sei

$$a = \alpha + \beta i,$$

β von Null verschieden, und sei

$$z = \varrho e^{(\varphi + 2m\pi)i},$$

so kann

$$\alpha \log \varrho - \beta(\varphi + 2m\pi),$$

wenn m als positive oder negative Zahl wächst und gleichzeitig ϱ auf geeignete Weise abnimmt, jeden beliebigen Werth erhalten. Demnach kann der Modul von z^a, wenn z gleichzeitig Umdrehungen um $z = 0$ macht und sich der Null annähert, jeden beliebigen Werth annehmen.

5.

Als ein ferneres Beispiel werde die Differentialgleichung

$$z^k \frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 \tag{1.}$$

*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1878, und Journal de l'École Polytechnique, cah. 45, p. 21 und 26.

betrachtet, in welcher p_0, p_1, p_2, p_3 in der Umgebung von $z = 0$ eindeutige und continuirliche Functionen sind, zwischen denen die Gleichung

$$\frac{4}{3}\left(p_3\frac{dp_2}{dz} - p_2\frac{dp_3}{dz}\right)z^k - \frac{4}{3}p_1p_2p_3 + \frac{8}{27}p_2^3 + 4p_0p_3^2 = 0 \tag{2.}$$

besteht. Setzt man

$$-\frac{4}{3}\frac{p_2}{z^k}y - \frac{2p_3}{z^k}y^2 = \frac{1}{w}\frac{dw}{dz}, \tag{3.}$$

so folgt

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \lambda\frac{dw}{dz} - \mu w = 0, \tag{4.}$$

wo

296]

$$\left\{\begin{aligned} \mu &= -\frac{4}{3}\frac{p_0p_3}{z^{2k}}, \\ \lambda &= -\frac{k}{z} - \frac{d\log p_3}{dz} + \frac{3p_0p_3}{p_2z^k} + \frac{p_1}{z^k}. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Ist $k > 1$, so ist wiederum $z = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (4.) und demnach im Allgemeinen auch für die der Gleichung (1.).

Ausserdem ergiebt die Gleichung (3.), dass die Integrale y im Allgemeinen in der Umgebung von $z = 0$ eine unbestimmte Verzweigung erfahren.

6.

Mit den vorhergehenden Untersuchungen hängt auf das Engste die Frage zusammen: wie viele Integrale einer Differentialgleichung vermögen vorgeschriebenen Anfangsbedingungen Genüge zu leisten?

Wir beschränken uns hierbei auf Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dz} = \Phi(z, y), \tag{F.}$$

wo $\Phi(z, y)$ eine wohldefinirte Function der beiden Variabelen bedeutet, und auch nur auf den Fall, dass die Anfangswerthe (z_0, y_0) keine Singularität der Function $\Phi(z, y)$ darbieten. In diesem Falle giebt es bekanntlich eine Lösung der Gleichung (F.) $y = u$ von der Beschaffenheit, dass für $z = z_0$, $u = y_0$

und dass sie innerhalb eines gewissen $z = z_0$ umgebenden Gebietes eindeutig und stetig ist*).

Setzen wir

$$y = u + v, \tag{1.}$$

so erhalten wir für v die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} = \Phi(z, u+v) - \Phi(z, u). \tag{2.}$$

Es sei

$$\Phi(z, u+v) - \Phi(z, u) = v^m \Psi(z, u, v), \tag{3.}$$

so ist, wenn man von einzelnen singulären Werthen von z abstrahirt, $\Psi(z, u, v)$ nach ganzen positiven Potenzen von v entwickelbar.

Wir haben schon oben in No. 2 bemerkt, dass wir im Allgemeinen nicht mit BRIOT und BOUQUET**) aus (2.) und (3.) den Schluss ziehen können, [297 dass es ausser $y = u$ kein anderes Integral der Gleichung (F.) geben könne, welches für $z = z_0$ den Werth $y = y_0$ annähme.

In der That, betrachten wir in der mit (2.) identischen Gleichung

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{v^m \Psi(z, u, v)} \tag{G.}$$

z als Function von v, so hat (G.) die Beschaffenheit der Gleichung (A.), wenn in der letzteren y mit z und z mit v vertauscht und $k = m$ gesetzt wird. Denn da die Function u von z als in ihrem ganzen Verlaufe bekannt vorausgesetzt werden muss, so ist damit $\Psi(z, u, v)$ eine wohldefinirte Function von z und v.

Nun haben wir in den vorhergehenden Nummern erkannt, dass $v = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit der Integrale der Gleichung (G.) sein kann, was auf dasselbe hinauskommt, dass es unzählig viele Functionen z von v geben kann, welche für $v = 0$ jeden beliebigen Werth, also auch den Werth $z = z_0$ annehmen und der Differentialgleichung (G.) Genüge leisten. Dann aber giebt es auch unzählig viele Functionen v von z, welche für $z = z_0$ verschwinden und der Differentialgleichung (2.) genügen, d. h. unzählig viele

*) Siehe BRIOT et BOUQUET, a. a. O., S. 136–144.

**) A. a. O., S. 145.

Functionen $y = u + v$, welche für $z = z_0$ den Werth y_0 annehmen und der Gleichung (F.) genügen.

Der Fall, wo $m > 1$, setzt voraus, dass $y = u$ die Gleichung

$$\frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial y} = 0 \tag{4.}$$

befriedigt, derselbe tritt also nur für besondere Integrale der Gleichung (F.) auf.

Aber wir haben in No. 3 erkannt, dass auch für $m = 1$ der Punkt $v = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Gleichung (G.) werden kann.

Der Satz, dass es nur ein Integral u der Gleichung (F.) gebe, welches vorgeschriebene Anfangsbedingungen (z_0, y_0) befriedigt, ist also nur dann richtig, wenn für diese Function u die Integrale der Gleichung (G.) nicht den Punkt der Unbestimmtheit $v = 0$ besitzen.

7.

Zur Erläuterung des Vorhergehenden wollen wir zuerst ein Beispiel betrachten, in welchem $m > 1$. Es sei

$$\frac{dy}{dz} = \Phi(z, y) = \frac{a(az + \beta y)^2 - a(az + by)}{\beta(az + by) - b(az + \beta y)^2}, \tag{1.}$$

298] wo $a\beta - b\alpha$ von Null verschieden. Wählen wir die Anfangswerthe $\left(z_0, -\frac{\alpha}{\beta} z_0\right)$, so ist

$$\Phi(z_0, y_0) = -\frac{\alpha}{\beta}$$

ein bestimmter Werth, und $\Phi(z, y)$ hat in der Umgebung von $\left(z_0, -\frac{\alpha}{\beta} z_0\right)$ die in voriger Nummer verlangte Eigenschaft. Das Integral u ist

$$u = -\frac{\alpha}{\beta} z. \tag{2.}$$

Setzen wir in (1.)

$$y = u + v, \tag{3.}$$

so folgt die der Gleichung (G.) entsprechende Gleichung

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{\beta(a\beta - \alpha b)} \frac{(a\beta - \alpha b) z + b\beta v - b\beta^2 v^2}{v^2}. \tag{4.}$$

In der That wird diese Gleichung befriedigt durch

$$(\alpha b-\beta a)z = b\beta v-\beta C e^{-\frac{1}{\beta v}}, \tag{5.}$$

wo C eine willkürliche Constante.

Demnach giebt es unzählig viele Integrale der Gleichung (1.)

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}z+v, \tag{6.}$$

wo v eine Lösung der Gleichung (5.), welche sämmtlich für $z = z_0$ den Werth $y_0 = -\frac{\alpha}{\beta}z_0$ erhalten. Man hat dazu nur in Gleichung (5.) v so gegen Null convergiren zu lassen, dass z den Werth z_0 annimmt.

8.

Ein weiteres Beispiel betreffe den Fall $m = 1$. Es sei die (F.) entsprechende Gleichung

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z(z-1)}-\frac{2z-1}{z(z-1)}y-y^2. \tag{1.}$$

Haben η_1, η_2 dieselbe Bedeutung wie in meiner Arbeit*), und vertauscht man daselbst u mit z, so hat das allgemeine Integral von (1.) den Werth

[299

$$y = \frac{c_1\frac{d\eta_1}{dz}+c_2\frac{d\eta_2}{dz}}{c_1\eta_1+c_2\eta_2}, \tag{2.}$$

wo c_1, c_2 willkürliche Constanten bedeuten.

Man hat daher

$$y-\frac{d\log\eta_1}{dz} = c_2\frac{\eta_1\frac{d\eta_2}{dz}-\eta_2\frac{d\eta_1}{dz}}{\eta_1(c_1\eta_1+c_2\eta_2)} = \frac{c_2C}{z(z-1)\eta_1(c_1\eta_1+c_2\eta_2)}, \tag{3.}$$

wo C eine Constante bezeichnet**). Nach unzählig vielen Umläufen um $z = 1$ bleibt η_2 ungeändert, während η_1 in

*) Borchardts Journal, Bd. 83, S. 15 ff.[1]).

**) Ebenda, S. 19[2]).

[1]) Abh. XXIV dieses Bandes, S. 87 ff. Sch.

[2]) Ebenda, S. 92. Sch.

$$\lim(\eta_{i_2} - 2ni\eta_{i_2}) \text{ für } n = \infty$$

übergeht*), also im Allgemeinen unendlich wird.

Für einen beliebigen von $z = 0, 1, \infty$ verschiedenen, aber willkürlichen Werth von z wird daher nach Gleichung (3.)

$$\lim y = \lim \frac{d \log \eta_{i_1}}{dz} = \frac{d \log \eta_{i_2}}{dz}. \tag{4.}$$

Man kann also hieraus ersehen, dass im Allgemeinen in einem beliebigen Punkt $z = z_0$ unzählig viele Integrale gegen denselben Werth convergiren, wenn z auf geeigneten Wegen nach z_0 geführt wird.

Die der Gleichung (G.) entsprechende Gleichung wird in unserem Falle

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{v} \frac{z(z-1)}{-2z+1-2uz(z-1)-vz(z-1)} = \frac{1}{v} F(v, z), \tag{5.}$$

wo wir das Integral u der Gleichung (1.)

$$u = \frac{d \log \eta_{i_2}}{dz} \tag{6.}$$

wählen.

Wenn wir auf diese Gleichung das Verfahren der No. 3 anwenden, nachdem wir daselbst z mit v und y mit z vertauscht, so erhalten wir

$$F(0, z) = \frac{z(z-1)}{-2z+1-2uz(z-1)}. \tag{7.}$$

Wenn wir daher entsprechend der Gleichung (B'.) ζ aus der Gleichung

$$\frac{d\zeta}{dv} = \frac{1}{v} F(0, \zeta) \tag{8.}$$

300] bestimmen, so folgt aus derselben durch Integration

$$\log c - \log \zeta(\zeta-1) - 2 \log \eta_{i_2} = \log v,$$

wo η_{i_2} das Argument ζ beigelegt wird und wo c eine Constante bedeutet; demnach ist

$$v = \frac{c}{\eta_{i_2}^2 \zeta(\zeta-1)}. \tag{9.}$$

*) BORCHARDTs Journal, Bd. 83, S. 22[1]).

[1]) Abh. XXIV dieses Bandes, S. 96. Sch.

Macht ζ unendlich viele Umläufe um $\zeta = 0$, so wird

$$\lim \eta_{l_2} = \infty$$

für willkürliche von $0, 1, \infty$ verschiedene Werthe von ζ. Demnach entspricht dem $v = 0$ ein willkürlicher Werth von ζ.

Führen wir die Variabele ζ an die Stelle von v in Gleichung (5.) ein, d. h. bilden wir die der Gleichung (C'.) entsprechende Gleichung, so folgt aus No. 3, dass, je nach den verschiedenen Wegen, auf welchen v in Null einrückt und alle möglichen Werthe von ζ hervorbringt, auch alle möglichen Werthe z, also auch $z = z_0$, erzielt werden können. Wir haben am Anfang dieser Nummer auf anderem Wege gezeigt, dass in der That diese Werthe auch erzielt werden.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde

S. 394, Zeile 7 v. u. zwischen $e^{\frac{1}{z-a}}$ und b das Minuszeichen eingefügt,

„ 405, „ 9 Variabele statt Variabelen,

„ 407, Fussnote **) 361 statt 367,

„ 411, Gl. (G.) $\frac{1}{v^m \Psi(z, u, v)}$ statt $\frac{1}{v^m} \Psi(z, u, v)$ und

„ 414, „ (5.) $\frac{1}{v} F(v, z)$ statt $\frac{1}{v} F(v, z)$ gesetzt.

2) In dem am Schlusse der No. 4 (S. 409) angeführten Beispiel (wo übrigens Zeile 6 und 4 v. u. statt »jeden beliebigen Werth erhalten« zu setzen wäre »jedem beliebigen Werthe beliebig nahe kommen«) trifft für den Punkt $z = 0$ die in der No. 1 gegebene Definition eines Punktes der Unbestimmtheit nicht zu, da für einen Weg, der sich dem Punkte $z = 0$ spiralförmig annähert, von »letzten Wegelementen« nicht die Rede sein kann. In der That sagt FUCHS selbst in der No. 4, und ebenso auch in

späteren Abhandlungen, von einer Singularität, wie sie für die Integrale einer linearen Differentialgleichung der FUCHSschen Klasse auftritt, dass die Integrale daselbst nicht unbestimmt werden, er wollte also den Punkt $z = 0$ für eine Function, die in der Umgebung dieses Punktes in der Form

$$z^a \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k c_k z^k$$

darstellbar ist, nur dann als einen Punkt der Unbestimmtheit angesehen wissen, wenn die Anzahl der nicht verschwindenden Coefficienten c_k mit negativen Indices keine endliche ist. Man könnte die in der No. 1 gegebene Definition eines Punktes der Unbestimmtheit in folgender Weise fassen[1]). Es soll von einer Function $f(z)$ gesagt werden, dass sie an der Stelle $z = a$ nicht unbestimmt wird (bestimmt ist) wenn 1) alle Stellen in einer gewissen Umgebung von a reguläre Stellen der Function sind und wenn 2) für jede gegen die Null convergirende Werthenfolge $\delta_1, \delta_2, \ldots, (\lim_n \delta_n = 0)$, die so beschaffen ist, dass sich $f(z)$ an den Stellen $a+\delta_n$ regulär verhält, die Folge

$$f(a+\delta_1),\ f(a+\delta_2),\ \ldots$$

einem bestimmten, von der besonderen Wahl der Folge $\delta_1, \delta_2, \ldots$ unabhängigen, endlichen oder unendlich grossen Grenzwerthe

$$\lim_n f(a+\delta_n) = \lim_{z=a} f(z)$$

gleichmässig zustrebt, vorausgesetzt, dass für die Berechnung der Functionswerthe $f(a+\delta_n)$ ein beliebig gewählter, aber dann eindeutig festzuhaltender Zweig der Function $f(z)$ benutzt wird. — Eine Stelle a in deren jeder Nähe Stellen sich befinden, an welchen die Function $f(z)$ nicht unbestimmt ist, die aber selbst nicht zu diesen Stellen gehört, soll eine Stelle oder ein Punkt der Unbestimmtheit genannt werden. —

Das am Schlusse der No. 6 (S. 412) ausgesprochene Resultat hat in der Literatur vielfachen Widerspruch gefunden; es sei darum zur Klärung des Sachverhaltes das Folgende bemerkt.

Der von BRIOT und BOUQUET gegebene Unitätsbeweis für das durch die Anfangswerthe (z_0, y_0) bestimmte holomorphe Integral der Differentialgleichung (F.), S. 410, besagt, wie FUCHS in der No. 2, S. 396, bemerkt; dass ausser dem holomorphen Integrale kein anderes Integral existirt, welches den Werth y_0 annimmt, wenn z auf einem Wege von endlicher Länge in den Punkt z_0 einrückt. Allgemeiner hat Herr PICARD (Traité d'Analyse, t. II, 1893, S. 314 ff., zweite Aufl. 1905, S. 357 ff.) gezeigt, dass das holomorphe Integral u das einzige ist, welches die folgende Eigenschaft besitzt: Beschreibt man um z_0, y_0 Kreise L_0, K_0 mit hinreichend kleinen Radien, so liegen die Werthe von u, die Werthen von z innerhalb L_0 entsprechen, im Inneren von K_0, und wenn z längs einer bestimmten ganz im Inneren von L_0 verlaufenden Curve C in den Punkt z_0 einrückt, so rückt u längs eines innerhalb K_0 verlaufenden Weges in y_0 ein. Dagegen zeigt FUCHS, dass es unter gewissen Umständen ausser dem holomorphen Integrale u Integrale y geben kann, die in den Werth y_0 einrücken, wenn z auf geeignetem Wege in den Punkt z_0 geführt wird. SCH.

---

[1]) Vergl. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I (1895), S. 16, 17.

XLVIII.

ÜBER DIEJENIGEN ALGEBRAISCHEN GEBILDE, WELCHE EINE INVOLUTION ZULASSEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1886, XXXIX, S. 797—804; vorgetragen am 22. Juli; ausgegeben am 19. August 1886.)

In einer Untersuchung, deren Resultate an anderer Stelle veröffent- [797
licht werden sollen, bin ich zur Betrachtung solcher algebraischer Gebilde geführt worden, welche eine algebraische eindeutig umkehrbare Transformation in sich selbst von folgender Art zulassen. Ist P ein Punkt der das Gebilde darstellenden RIEMANNschen Fläche, P' ein durch die Transformation dem P zugeordneter Punkt derselben Fläche, so ist der nach derselben Transformation dem P' zugeordnete Punkt derselben RIEMANNschen Fläche mit P übereinstimmend. Ich will im Anschluss an die in der Geometrie gebräuchliche Sprechweise von zwei einander so zugeordneten Stellen der RIEMANNschen Fläche sagen, sie seien involutorisch gepaart, indem ich dabei stillschweigend voraussetze, dass die Zuordnung auf algebraischem Wege erfolge. In der folgenden Notiz erlaube ich mir die Ergebnisse mitzutheilen, zu welchen mich das Studium der genannten Gebilde geführt, und deren hauptsächlichstes darin besteht, dass die auf eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution abbildbaren RIEMANNschen Flächen die einzigen sind, welche eine solche involutorische Paarung zulassen. Da andererseits für die letztgenannte Art von Flächen auch stets

eine solche involutorische Paarung vorhanden ist, so ergiebt sich, dass diese Klasse von algebraischen Gebilden, welche man auch als die hyperelliptische Klasse bezeichnen könnte, durch die Eigenschaft eine involutorische Paarung zuzulassen vollständig und eindeutig characterisirt werden kann.

1.

Es sei

(A.) $$F(s, z) = 0$$

eine irreductible algebraische Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen s und z. Es werde vorausgesetzt, dass es zwei rationale Functionen von s und z gebe

798] (B.) $$\begin{cases} \zeta = \varphi(s, z), \\ \sigma = \psi(s, z) \end{cases}$$

von der Beschaffenheit, dass

(C.) $$\begin{cases} z = \varphi(\sigma, \zeta), \\ s = \psi(\sigma, \zeta) \end{cases}$$

und

(D.) $$F(\sigma, \zeta) = 0.$$

Wir wollen mit p das Geschlecht der Gleichung (A.) [den Rang nach der Bezeichnungsweise des Herrn WEIERSTRASS] und mit

$$f_1(s, z),\ f_2(s, z),\ \ldots,\ f_p(s, z)$$

die Differentialquotienten von p linear unabhängigen Integralen erster Gattung bezeichnen.

Wird in einem Integrale erster Gattung als Function des Ortes in der RIEMANNschen Fläche (s, z) die Substitution (C.) angewendet, so erhält man ein Integral erster Gattung als Function des Ortes in der RIEMANNschen Fläche (σ, ζ). Da andererseits die beiden RIEMANNschen Flächen (s, z), (σ, ζ) in dem Sinne identische Gebilde sind, dass wenn $z = \zeta$ auch alle über z in der einen gelegenen Werthe mit den über ζ in der anderen gelegenen Werthen der Reihe nach übereinstimmen, so ist auch p der Rang des algebraischen Gebildes (D.), und es sind $f_1(\sigma, \zeta), f_2(\sigma, \zeta), \ldots, f_p(\sigma, \zeta)$ Differentialquotienten von zu demselben gehörigen p linear unabhängigen Integralen erster Gattung.

Es ist daher

$$(E.) \qquad f_k(s,z)\,dz = [c_{k1}f_1(\sigma,\zeta) + c_{k2}f_2(\sigma,\zeta) + \cdots + c_{kp}f_p(\sigma,\zeta)]\,d\zeta, \quad (k = 1,2,\ldots,p)$$

$c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kp}$ bestimmte Constanten.

Durch Anwendung der Substitution (B.) auf die Integrale erster Gattung als Functionen des Ortes in der RIEMANNschen Fläche (σ,ζ) ergiebt sich ebenso

$$(F.) \qquad f_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta = [c_{k1}f_1(s,z) + c_{k2}f_2(s,z) + \cdots + c_{kp}f_p(s,z)]\,dz, \quad (k = 1,2,\ldots,p)$$

wo die Grössen c_{ki} in (F.) mit denen in (E.) übereinstimmen.

2.

Es sei

$$(1.) \qquad b_1f_1(s,z) + b_2f_2(s,z) + \cdots + b_pf_p(s,z) = G(s,z),$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_p$ Constanten bedeuten. Wir wollen dieselben so bestimmen, dass

$$(2.) \qquad G(s,z)\,dz = wG(\sigma,\zeta)\,d\zeta, \qquad [799$$

also auch

$$(2'.) \qquad G(\sigma,\zeta)\,d\zeta = wG(s,z)\,dz$$

werde und w eine Constante sei.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (E.) geht Gleichung (2.) über in

$$(3.) \qquad P_1f_1(\sigma,\zeta) + P_2f_2(\sigma,\zeta) + \cdots + P_pf_p(\sigma,\zeta) = 0,$$

wo

$$(4.) \qquad P_k = b_1c_{1k} + b_2c_{2k} + \cdots + b_pc_{pk} - wb_k.$$

Da $f_1, f_2, \ldots, f_p$ linear unabhängig sind, so ist

$$(5.) \qquad P_k = 0. \qquad (k = 1,2,\ldots,p)$$

Hieraus folgt, dass w sich durch die Gleichung

$$(G.) \qquad \begin{vmatrix} c_{11}-w & c_{21} & \cdots & c_{p1} \\ c_{12} & c_{22}-w & \cdots & c_{p2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1p} & c_{2p} & \cdots & c_{pp}-w \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt.

In Übereinstimmung mit einem Verfahren, welches ich bei der Fixirung der Fundamentalsysteme der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen angewendet habe*), und unter Berücksichtigung der von Herrn HAMBURGER**) gemachten weiteren Ausführungen desselben, kann man, wenn w_1 eine λ-fache Wurzel der Gleichung (G.) ist, für die Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_p$ solche λ Bestimmungen treffen, dass die zugehörigen Functionen $G(s,z)$ in Gruppen zerfallen, von der Art, dass eine m-gliedrige Gruppe linear unabhängiger Functionen $G^{(1)}(s,z)$, $G^{(2)}(s,z)$, ..., $G^{(m)}(s,z)$ die Eigenschaft hat

$$(4.)\qquad \begin{cases} G^{(1)}(s,z)\,dz = w_1 G^{(1)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta, \\ G^{(2)}(s,z)\,dz = [w_1 G^{(2)}(\sigma,\zeta) + G^{(1)}(\sigma,\zeta)]\,d\zeta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G^{(m)}(s,z)\,dz = [w_1 G^{(m)}(\sigma,\zeta) + G^{(m-1)}(\sigma,\zeta)]\,d\zeta. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen (B.) bestehen aber mit diesen Gleichungen zugleich die folgenden

$$(5.)\qquad \begin{cases} G^{(1)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = w_1 G^{(1)}(s,z)\,dz, \\ G^{(2)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = [w_1 G^{(2)}(s,z) + G^{(1)}(s,z)]\,dz, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G^{(m)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = [w_1 G^{(m)}(s,z) + G^{(m-1)}(s,z)]\,dz. \end{cases}$$

800] Substituirt man aus (5.) die Werthe von $G^{(k)}(\sigma,\zeta)\,d\zeta$ in (4.), so erhält man

$$(6.)\qquad \begin{cases} G^{(1)}(s,z) = w_1^2 G^{(1)}(s,z), \\ G^{(2)}(s,z) = w_1^2 G^{(2)}(s,z) + 2w_1 G^{(1)}(s,z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G^{(m)}(s,z) = w_1^2 G^{(m)}(s,z) + 2w_1 G^{(m-1)}(s,z) + G^{(m-2)}(s,z). \end{cases}$$

Da nun w_1 von Null verschieden, so würde hieraus sich ein Widerspruch mit der Voraussetzung ergeben, wonach die Functionen $G^{(k)}(s,z)$ linear unabhängig sind. Dieser Widerspruch wird dadurch aufgehoben, dass in jeder der genannten Gruppen nur ein Element vorhanden ist.

---

*) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 134–136[1]).

**) BORCHARDTS Journal, Bd. 76, S. 121.

---

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 173–176. Sch.

Hieraus ergiebt sich, dass wenn $w_1, w_2, \ldots, w_p$ die Wurzeln der Gleichung (G.) bedeuten, mögen diese theilweise gleich oder sämmtlich von einander verschieden sein, es stets p linear unabhängige Differentialquotienten von Integralen erster Gattung $G_1(s,z), G_2(s,z), \ldots, G_p(s,z)$ giebt, für welche bez. die Gleichungen

$$\text{(H.)} \qquad \begin{cases} G_k(s,z)\,dz = w_k G_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta, \\ G_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta = w_k G_k(s,z)\,dz, \end{cases} \qquad (k = 1,2,\ldots,p)$$

stattfinden.

Wählt man nun von vornherein $f_k(s,z) = G_k(s,z)$, so treten diese Gleichungen (H.) an die Stelle der Gleichungen (E.) und (F.).

Aus den beiden Gleichungen (H.) folgt

$$\text{(J.)} \qquad w_k^2 = 1.$$

Die Wurzeln der Gleichung (G.) sind demnach sämmtlich gleich der positiven oder der negativen Einheit.

Es folgt daher aus den Gleichungen (H.)

$$\text{(K.)} \qquad G_k(s,z)\,dz = \pm G_k(\sigma,\zeta)\,d\zeta. \qquad (k = 1,2,\ldots,p)$$

3.

Es möge in den Gleichungen (K.) für $k = 1, 2, \ldots, \lambda$ das obere, dagegen für $k = \lambda+1, \lambda+2, \ldots, \lambda+\mu$ das untere Vorzeichen gelten, wenn

$$\text{(1.)} \qquad p = \lambda + \mu$$

gesetzt wird.

Es sei

$$\text{(2.)} \qquad \Phi(s,z) = c_1 G_1(s,z) + c_2 G_2(s,z) + \cdots + c_\lambda G_\lambda(s,z)$$

und

$$\text{(3.)} \qquad \Psi(s,z) = e_1 G_{\lambda+1}(s,z) + e_2 G_{\lambda+2}(s,z) + \cdots + e_\mu G_{\lambda+\mu}(s,z),$$

wo c_k, e_k Constanten bedeuten. Ist alsdann $(s,z) \equiv (s',z')$ eine Lösung [301 der Gleichung

$$\text{(4.)} \qquad \Phi(s,z) = 0$$

und $(\sigma,\zeta) \equiv (\sigma',\zeta')$ das nach den Gleichungen (B.) dem $(s,z) \equiv (s',z')$ ent-

sprechende Werthsystem, so ist zufolge der Gleichungen (K.) $(s, z) \equiv (\sigma', \zeta')$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung (4.).

Dieselbe Eigenschaft hat auch die Gleichung

$$\Psi(s, z) = 0. \tag{5.}$$

I. Die Constanten c_k, e_k lassen sich so bestimmen, dass die Gleichungen (4.) und (5.) $2p-4$ gemeinschaftliche Lösungen haben, wovon immer je zwei nach den Gleichungen (B.) oder (C.) involutorisch gepaart sind.

Eliminirt man nämlich (s, z) zwischen der Gleichung (A.) und den Gleichungen (4.) und (5.), so erhält man als Resultante eine Gleichung

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_\lambda, e_1, e_2, \ldots, e_\mu) = 0. \tag{6.}$$

Nach den bekannten Methoden zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Lösungen eines Systems von Gleichungen ergiebt sich, dass die Grössen

$$\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \ldots, \frac{c_\lambda}{c_1}, \quad \frac{e_2}{e_1}, \frac{e_3}{e_1}, \ldots, \frac{e_\mu}{e_1}$$

im Ganzen $\lambda+\mu-2$ Bedingungsgleichungen zu befriedigen haben, wenn die Gleichungen (A.), (4.), (5.), $\lambda+\mu-2$ gemeinschaftliche Lösungen besitzen sollen. Und man kann zeigen, dass diese Bedingungsgleichungen, deren Anzahl mit derjenigen der zu bestimmenden Grössen $\frac{c_k}{c_1}$, $\frac{e_k}{e_1}$ übereinstimmt, immer befriedigt werden können. Die Gleichungen (A.), (4.), (5.) werden aber alsdann in Folge der oben angegebenen Eigenschaft der Gleichungen (4.) und (5.) auch durch diejenigen Grössensysteme (s, z) befriedigt, welche den bereits erreichten $\lambda+\mu-2$ gemeinschaftlichen Lösungen nach den Gleichungen (B.) oder (C.) zugeordnet sind.

Den Nachweis dafür, dass unter den Bestimmungsweisen der Verhältnisse der Grössen c_k und e_k immer solche vorhanden sind, dass zu den ihnen entsprechenden $\lambda+\mu-2$ gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen (A.), (4.), (5.) noch die zu diesen Lösungen involutorisch zugeordneten Grössensysteme (s, z) als $\lambda+\mu-2$ neue Lösungen hinzutreten, erfordert einigermaassen verwickelte Erörterungen, und wir wollen uns hier darauf beschränken, dieselben an dem Beispiele $p = 4$, $\lambda = 2$ zu erläutern.

Jede der Gleichungen [802

$$c_1 G_1(s,z) + c_2 G_2(s,z) = 0, \tag{4a.}$$

$$e_1 G_3(s,z) + e_2 G_4(s,z) = 0 \tag{5a.}$$

wird in diesem Falle durch sechs Werthsysteme befriedigt, wovon je zwei durch die Gleichungen (B.) einander zugeordnet sind. Soll denselben durch gemeinschaftliche Werthsysteme (s, z) genügt werden, so hat man zwischen den Gleichungen (4a.), (5a.) und (A.) s und z zu eliminiren. Das Eliminationsresultat

$$f\left(\frac{c_2}{c_1}, \frac{e_2}{e_1}\right) = 0 \tag{6a.}$$

ist sowohl in Bezug auf $\frac{c_2}{c_1}$, als auch in Bezug auf $\frac{e_2}{e_1}$ vom dritten Grade, weil die drei Paare involutorisch einander zugeordneter Werthsysteme (s, z), welche einem bestimmten Werthe von $\frac{c_2}{c_1}$ entsprechen, für

$$\frac{e_2}{e_1} = -\frac{G_3(s,z)}{G_4(s,z)}$$

nur drei verschiedene Werthe hervorbringen, und umgekehrt. Für einen Werth $\frac{c_2}{c_1} = a$, für welchen die Gleichung (6a.) zwei gleiche Wurzeln $\frac{e_2}{e_1} = \alpha$ hat, geben zwei der drei Paare involutorisch conjugirter Werthsysteme (s, z), welche $-\frac{G_1(s,z)}{G_3(s,z)}$ den Werth a verschaffen, der Function $-\frac{G_3(s,z)}{G_4(s,z)}$ den Werth α. Demnach haben die Gleichungen

$$G_1(s,z) + aG_3(s,z) = 0 \tag{4b.}$$

und

$$G_3(s,z) + \alpha G_4(s,z) = 0 \tag{5b.}$$

zwei Paare involutorisch conjugirter Werthsysteme (s, z) als gemeinschaftliche Lösungen.

Aus dem Satze I. ergiebt sich unmittelbar:

II. Man kann $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda, e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ stets so bestimmen, dass

$$R(s,z) = \frac{c_1 G_1(s,z) + c_2 G_2(s,z) + \cdots + c_\lambda G_\lambda(s,z)}{e_1 G_{\lambda+1}(s,z) + e_2 G_{\lambda+2}(s,z) + \cdots + e_\mu G_{\lambda+\mu}(s,z)} \tag{L.}$$

nur in zwei Stellen der RIEMANNschen Fläche unendlich erster Ordnung wird.

803] Ist $\mu = 0$ oder $\lambda = 0$, d. h. gilt in den Gleichungen (K.) für $k = 1, 2, \ldots, p$ überall das obere oder überall das untere Vorzeichen, so kann man in

$$(L'.) \qquad R(s,z) = \frac{c_2 G_2(s,z) + c_3 G_3(s,z) + \cdots + c_p G_p(s,z)}{G_1(s,z)}$$

$c_2, c_3, \ldots, c_p$ so bestimmen, dass der Zähler für $p-2$ beliebige Stellen, in welchen $G_1(s,z)$ Null erster Ordnung wird, gleichfalls von der ersten Ordnung verschwindet, und es wird alsdann der Zähler ausserdem Null erster Ordnung in denjenigen Stellen, welche zu jenen involutorisch gepaart sind, und da diese zu gleicher Zeit die Gleichung $G_1(s,z) = 0$ befriedigen, so ergiebt sich wiederum, dass $R(s,z)$ nur in zwei Stellen unendlich erster Ordnung wird. Setzen wir

$$(M.) \qquad R(s,z) = u,$$

so folgt aus II.:

III. Es lassen sich s und z als rationale Functionen von u und $\sqrt{S(u)}$ darstellen, wo $S(u)$ eine ganze rationale Function von u, und es sind umgekehrt u und $\sqrt{S(u)}$ rationale Functionen von s und z.

4.

Es sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die RIEMANNsche Fläche (A.) durch eine rationale und eindeutig umkehrbare Substitution auf eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche abgebildet werden könne. Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function $R(s,z)$, welche nur in zwei Punkten der RIEMANNschen Fläche (A.) unendlich gross erster Ordnung wird.

Setzen wir alsdann

$$(S.) \qquad R(s,z) = u,$$

so sind z und s als rationale Functionen von u und $\sqrt{S(u)}$ darstellbar, wo $S(u)$ eine ganze rationale Function von u, und es sind umgekehrt u und $\sqrt{S(u)}$ rationale Functionen von s und z. Ist daher (σ, ζ) ein Punkt der RIEMANNschen Fläche (A.), für welchen u den nämlichen Werth wie in (s,z) annimmt, so sind σ und ζ eindeutige und demnach rationale Functionen von s und z,

$$\zeta = \varphi(s, \varepsilon), \quad \sigma = \psi(s, \varepsilon)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\varepsilon = \varphi(\sigma, \zeta), \quad s = \psi(\sigma, \zeta),$$

d. h. zwei Stellen der RIEMANNschen Fläche, für welche u den nämlichen [804 Werth annimmt, bilden eine Involution.

Wenn wir diese Bemerkung mit dem Satze III. der vorigen Nummer zusammenhalten, so gelangen wir zu dem folgenden Resultate:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine algebraische RIEMANNsche Fläche eine algebraische Involution je zweier ihrer Punkte zulässt, ist die, dass diese RIEMANNsche Fläche und eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche gegenseitig rational auf einander abgebildet werden können.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 419, Zeile 8 $c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kp}$ statt $c_{k1}, c_{k2}, c_{kp}, \ldots,$

„ „ , Gl. (F.) c_{k1} statt c_{h1},

„ „ , Zeile 21 ist statt muss,

„ 421, zweite der Gln. (H.) $d\zeta$ statt ds,

„ „ , Zeile 15 den Gleichungen statt Gleichung.

2) Die in dieser Abhandlung enthaltenen Erörterungen erfordern eine Ergänzung, die in der Abh. LI gegeben ist. Die in den ersten Worten der Einleitung erwähnte Untersuchung ist in der folgenden Abhandlung XLIX enthalten. SCH.

XLIX.

ÜBER EINE KLASSE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100, 1887, S. 189—200.)

In meiner Arbeit (Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der [189
Wissenschaften, 8. Jan. 1881[1])) habe ich die Bedingungen gegeben, welche zu erfüllen sind, damit die symmetrischen Functionen der Variabeln z_1, z_2, welche durch die Gleichungen

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 + f(z_2)\,dz_2 = du_1, \\ \varphi(z_1)\,dz_1 + \varphi(z_2)\,dz_2 = du_2 \end{cases}$$

als Functionen der Veränderlichen u_1, u_2 definirt sind, in der Umgebung eines solchen Werthsystemes $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$ sich eindeutig verhalten, für welches

$$(\beta.) \qquad f(z_1)\varphi(z_2) - f(z_2)\varphi(z_1) = 0.$$

Es ergab sich, dass, wenn u_1, u_2 mit von einander unabhängiger Veränderlichkeit in die Werthe $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$ einrücken, z_1, z_2 nicht Werthe erreichen können, welche die Gleichung (β.) befriedigen, wenn alle Lösungen der letzteren Gleichung zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 + f(z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(z_1)\,dz_1 + \varphi(z_2)\,dz_2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten.

---

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Als eine Folgerung dieses Theorems wurde dort nachgewiesen, dass z, $f(z)^2$, $\varphi(z)^2$ zweiwerthige Functionen von

$$\zeta = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

seien von der Beschaffenheit, dass

$$f(z)^2\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2, \quad \varphi(z)^2\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2$$

einwerthige Functionen derselben Variablen darstellen.

In einer Arbeit, enthalten in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 5. April 1883[1]), habe ich die Verallgemeinerung desselben Theorems für die Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der Differentialgleichungen

190] (δ.) $$\sum_1^n f_k(z_i)\,dz_i = du_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

unter Voraussetzung einer beliebigen Zahl n entwickelt.

Im Anschluss an den speciellen Fall $n = 2$ erlaube ich mir im Folgenden die Resultate einer Untersuchung mitzutheilen, welche sich auf lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezieht, deren Coefficienten rationale Functionen des Ortes in einer algebraischen Riemannschen Fläche sind. Indem nämlich in (α.) für $f(z)$, $\varphi(z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer solchen Differentialgleichung gesetzt wird, werden die Bedingungen dafür entwickelt, unter welchen Umständen alle Stellenpaare der Riemannschen Fläche, welche die Gleichung (β.) befriedigen, auch Lösungen der beiden Gleichungen (γ.)$_n^{\prime}$ oder vielmehr der Gleichungen

(γ'.) $$\begin{cases} f(z_1)\,dz_1 \pm f(z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(z_1)\,dz_1 \pm \varphi(z_2)\,dz_2 = 0 \end{cases}$$

mit correspondirenden Vorzeichen werden.

Diese Resultate habe ich der Hauptsache nach bereits in der Sitzung der Berliner Akademie vom 30. Juli 1885 vorgetragen. Es ist mir aber später durch Anwendung eines Theorems, welches ich in einer der Akademie am 22. Juli 1886 vorgelegten und seitdem veröffentlichten Notiz[2]) entwickelt habe, gelungen, dieselben wesentlich zu vereinfachen und auszuführen.

---

1) Abh. XLI, S. 341 ff. dieses Bandes. Sch.

2) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

1.

Es seien die Coefficienten der Gleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + G(s,z)\frac{dy}{dz} + H(s,z)y = 0$$

rationale Functionen der Grössen s und z, zwischen welchen eine irreductible algebraische Gleichung

$$\text{(B.)} \qquad F(s,z) = 0$$

besteht. Werden an irgend einem Punkte (s_0, z_0) der die algebraische Function (B.) darstellenden RIEMANNschen Fläche die Werthe $y = y_0$, $\frac{dy}{dz} = y_0'$ fixirt, so ist dadurch der Verlauf eines Integrals der Gleichung (A.) in der ganzen RIEMANNschen Fläche festgesetzt. Wie für den Fall, dass die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen von z, kann man auch hier [191 auf unendlich viele verschiedene Weisen ein Fundamentalsystem von Integralen $f(s,z)$, $\varphi(s,z)$ als Functionen des Ortes in der RIEMANNschen Fläche herstellen, durch welche sich jedes andere Integral an derselben Stelle (s,z) linear, homogen und mit constanten Coefficienten darstellen lässt.

Es soll nunmehr untersucht werden, unter welchen Umständen die beiden Gleichungen

$$\text{(C.)} \qquad \begin{cases} f(s_1,z_1)\,dz_1 \pm f(s_2,z_2)\,dz_2 = 0, \\ \varphi(s_1,z_1)\,dz_1 \pm \varphi(s_2,z_2)\,dz_2 = 0, \end{cases}$$

in welchen sich die Vorzeichen entsprechen, gleichzeitig durch jedes Punktepaar (s_1,z_1), (s_2,z_2) befriedigt werden, welches durch die Gleichung

$$\text{(D.)} \qquad \begin{vmatrix} f(s_1,z_1) & f(s_2,z_2) \\ \varphi(s_1,z_1) & \varphi(s_2,z_2) \end{vmatrix} = 0$$

zusammenhängt.

Wir bezeichnen mit y und v resp. die Integrale der Gleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^2y}{dz_1^2} + G(s_1,z_1)\frac{dy}{dz_1} + H(s_1,z_1)y = 0,$$

$$\text{(2.)} \qquad \frac{d^2v}{dz_2^2} + G(s_2,z_2)\frac{dv}{dz_2} + H(s_2,z_2)v = 0,$$

wo

$$\text{(3.)} \qquad F(s_1,z_1) = 0, \quad F(s_2,z_2) = 0,$$

und setzen fest, dass z_2 eine noch zu bestimmende Function von z_1 sei.

Transformiren wir die Gleichung (2.) in die unabhängige Variable z_1, indem wir

$$\frac{dz_2}{dz_1} = X \tag{4.}$$

setzen, so geht dieselbe über in

$$X\frac{d^2v}{dz_1^2} + \left[X^2 G(s_2, z_2) - \frac{dX}{dz_1}\right]\frac{dv}{dz_1} + X^2 H(s_2, z_2)v = 0. \tag{5.}$$

Soll z_2 mit z_1 so verbunden sein, dass (s_1, z_1), (s_2, z_2) gleichzeitig den beiden Gleichungen (C.) genügen, so muss die Gleichung, welche

$$\omega = -Xv \tag{6.}$$

befriedigt, nämlich

$$\frac{d^2\omega}{dz_1^2} + G_1\frac{d\omega}{dz_1} + H_1\omega = 0, \tag{7.}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} G_1 &= -3\frac{d\log X}{dz_1} + XG(s_2, z_2), \\ H_1 &= -3\left(\frac{d\log X}{dz_1}\right)^2 + \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dz_1^2} + G(s_2, z_2)\frac{dX}{dz_1} - X^2 H(s_2, z_2), \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

192] mit der Gleichung (1.) sämmtliche Integrale gemeinschaftlich haben. Hieraus folgt zunächst

$$G_1 = G(s_1, z_1)$$

oder

$$-\frac{d\log X}{dz_1} + XG(s_2, z_2) = G(s_1, z_1) \tag{9.}$$

und

$$H_1 = H(s_1, z_1),$$

oder unter Berücksichtigung von (9.),

$$P(s_2, z_2)X^2 = P(s_1, z_1), \tag{10.}$$

wenn wir

$$P(s, z) = -3\frac{dG(s, z)}{dz} + 9H(s, z) - 2G(s, z)^2 \tag{11.}$$

setzen.

Die Gleichung (9.) besagt, dass

$$\sqrt[3]{\Delta(s_2, z_2)}\,dz_2 - \sqrt[3]{\Delta(s_1, z_1)}\,dz_1 = 0, \tag{E.}$$

wo

$$(12.) \qquad \Delta(s,z) = f(s,z)\frac{d\varphi(s,z)}{dz} - \varphi(s,z)\frac{df(s,z)}{dz} = e^{-\int G(s,z)\,dz}.$$

Die Gleichung (E.) ist schon eine unmittelbare Folgerung aus dem Zusammenbestehen der beiden Gleichungen (C.) (vergleiche meine Arbeit in den Abhandlungen der Göttinger Societät[1]).

Die Gleichung (10.) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(F.) \qquad \sqrt{P(s_2,z_2)}\,dz_2 - \sqrt{P(s_1,z_1)}\,dz_1 = 0.$$

Es ist demnach erforderlich, dass alle Punktepaare (s_1,z_1), (s_2,z_2), welche der Gleichung (D.) genügen, auch die beiden wohldefinirten Differentialgleichungen (E.) und (F.) befriedigen.

2.

Aus den Gleichungen (E.) und (F.) folgt

$$(G.) \qquad \frac{\sqrt{P(s_2,z_2)}}{\sqrt[3]{\Delta(s_2,z_2)}} = \frac{\sqrt{P(s_1,z_1)}}{\sqrt[3]{\Delta(s_1,z_1)}}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung unter Berücksichtigung von (F.) und Gleichung (12.) voriger Nummer, so folgt

$$(H.) \qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}P(s_2,z_2)^{-\frac{1}{2}}\frac{dP(s_2,z_2)}{dz_2} + \tfrac{1}{3}G(s_2,z_2)P(s_2,z_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}P(s_1,z_1)^{-\frac{1}{2}}\frac{dP(s_1,z_1)}{dz_1} + \tfrac{1}{3}G(s_1,z_1)P(s_1,z_1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right. \qquad [193$$

Es könnten nun die Coefficienten der Gleichung (A.) so beschaffen sein, dass

$$(1.) \qquad \tfrac{1}{2}P(s,z)^{-\frac{1}{2}}\frac{dP(s,z)}{dz} + \tfrac{1}{3}G(s,z)P(s,z)^{-\frac{1}{2}} = a,$$

wo a constant.

Setzen wir alsdann in (A.)

$$(2.) \qquad y = e^{-\frac{1}{2}\int G(s,z)\,dz}\omega,$$

so folgt

$$(3.) \qquad \frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{1}{3}G(s,z)\frac{d\omega}{dz} + \frac{1}{9}P(s,z)\omega = 0.$$

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Ist $P(s,z)$ von Null verschieden, so führen wir in diese Gleichung an die Stelle der Variablen z die mit ihr durch Gleichung

$$du = P(s,z)^{\frac{1}{2}}dz \tag{4.}$$

verbundene Variable u ein, und erhalten

$$P(s,z)\left[\frac{d^2\omega}{du^2}+a\frac{d\omega}{du}+\frac{1}{9}\omega\right]=0. \tag{5.}$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn $P(s,z)$ nicht identisch verschwindet, das allgemeine Integral der Gleichung (A.) entweder

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int G(s,z)\,dz}\left[C_1 e^{\varepsilon_1\int P(s,z)^{\frac{1}{2}}dz}+C_2 e^{\varepsilon_2\int P(s,z)^{\frac{1}{2}}dz}\right], \tag{6.}$$

wo C_1, C_2 willkürliche Constanten und

$$\varepsilon_1 = -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{1}{9}}, \qquad \varepsilon_2 = -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{1}{9}},$$

wenn nämlich $\frac{a^2}{4}-\frac{1}{9}$ von Null verschieden, oder

$$y = e^{\frac{1}{2}\int[-G(s,z)\pm 2P(s,z)^{\frac{1}{2}}]dz}\left[C_1+C_2\int P(s,z)^{\frac{1}{2}}dz\right], \tag{6a.}$$

wenn $a = \pm\frac{2}{3}$.

Ist $P(s,z)$ identisch Null, so folgt aus Gleichung (3.)

$$y = e^{-\frac{1}{2}G(s,z)\,dz}\left[C_1+C_2\int dz\, e^{-\frac{1}{2}\int G(s,z)\,dz}\right]. \tag{7.}$$

Von dem durch die Gleichung (1.) bezeichneten Ausnahmefall abgesehen, ergiebt sich also der Satz:

Zwischen den Werthenpaaren (s_1,z_1), (s_2,z_2), welche gleichzeitig den Gleichungen (E.) und (F.) genügen, findet die algebraische Gleichung (H.) statt.

194] 3.

Setzen wir

$$\frac{\varphi(s,z)}{f(s,z)} = \zeta, \tag{I.}$$

so folgt aus der Voraussetzung, dass die Werthenpaare (s_1,z_1), (s_2,z_2), welche die Gleichung (D.) befriedigen, auch gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$(C'.) \qquad \begin{cases} f(s_1, z_1)\,ds_1 + f(s_2, z_2)\,ds_2 = 0, \\ \varphi(s_1, z_1)\,ds_1 + \varphi(s_2, z_2)\,ds_2 = 0 \end{cases}$$

genügen, dass zu jedem ζ nicht mehr als zwei Stellen der RIEMANNschen Fläche gehören (s. meine Arbeit in den Abhandlungen der Göttinger Societät[1]).

Ist demnach (s_1, z_1) eine beliebige Stelle der RIEMANNschen Fläche, ζ ein nach Gleichung (I.) zugehöriger Werth, so giebt es höchstens eine zweite Stelle (s_2, z_2), für welche ζ denselben Werth erhält. Ist aber (s_1, z_1) gegeben, so ist der allgemeine Werth von ζ

$$(1.) \qquad \zeta' = \frac{\alpha\varphi(s_1, z_1) + \beta f(s_1, z_1)}{\gamma\varphi(s_1, z_1) + \delta f(s_1, z_1)},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten sind, deren Werthe den verschiedenen Umläufen von (s, z) um die singulären Punkte der Gleichung (A.) entsprechen.

Ist σ ein in der RIEMANNschen Fläche von (s_1, z_1) nach (s_2, z_2) führender Weg, auf welchem

$$\frac{\varphi(s_2, z_2)}{f(s_2, z_2)} = \frac{\varphi(s_1, z_1)}{f(s_1, z_1)}$$

wird, und macht man von (s_2, z_2) aus denselben Weg rückwärts nach (s_1, z_1), vollzieht alsdann diejenigen Umläufe um die singulären Punkte von (A.), welche (1.) hervorgebracht, und kehrt alsdann auf σ nach (s_2, z_2) zurück, so hat man mit (s_2, z_2) einen Umlauf vollzogen, für welchen die Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{\alpha\varphi(s_2, z_2) + \beta f(s_2, z_2)}{\gamma\varphi(s_2, z_2) + \delta f(s_2, z_2)} = \zeta'$$

stattfindet.

Da die Gleichung

$$(3.) \qquad \frac{\alpha\varphi(s, z) + \beta f(s, z)}{\gamma\varphi(s, z) + \delta f(s, z)} = \zeta'$$

nur zwei Lösungen (s, z) zulässt, so folgt, dass es ausser $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$ keine Stelle mehr giebt, welche dieselbe befriedigte. D. h.

Zu jedem Punkte (s_1, z_1) giebt es nur einen Punkt (s_2, z_2), welcher mit demselben die Gleichung (D.) befriedigt.

Nach dem Satze am Schlusse der No. 1 und nach dem Satze am Schlusse der vorigen Nummer ergiebt sich demnach:

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

195] Die Werthenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche der Gleichung (D.) genügen, müssen so beschaffen sein, dass

$$\text{(K.)} \qquad \begin{cases} z_2 = \varrho(s_1, z_1), & s_2 = \sigma(s_1, z_1), \\ z_1 = \varrho(s_2, z_2), & s_1 = \sigma(s_2, z_2), \end{cases}$$

wo ϱ, σ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten, und dass sie zugleich die Gleichung (H.) befriedigen.

4.

Nach einem Satze, welchen ich in einer in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (22. Juli 1886) enthaltenen Notiz[1]) veröffentlicht habe, ergiebt sich aus dem Bestehen der Gleichungen (K.) für den Fall, dass der Rang p der die Gleichung (B.) darstellenden RIEMANNschen Fläche grösser ist als Null, dass dieselbe durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution auf eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche abgebildet werden kann.

Es ist also

$$\text{(L.)} \qquad \begin{cases} z = \psi_1(u, \sqrt{S(u)}), & s = \psi_2(u, \sqrt{S(u)}), \\ u = \tilde{\omega}_1(s, z), & \sqrt{S(u)} = \tilde{\omega}_2(s, z), \end{cases}$$

wo $S(u)$ eine ganze rationale Function von u mit lauter ungleichen Linearfactoren, ψ_1, ψ_2, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten.

Aus den Entwicklungen, welche ich in der erwähnten Notiz (Sitzungsber. der Berliner Akad. der Wissensch. 22. Juli 1886[1]) gegeben habe, geht gleichzeitig hervor, dass die rationale Function $\tilde{\omega}_1(s, z)$ so gewählt werden kann, dass u für zwei durch die Gleichung (K.) involutorisch gepaarte Stellen der RIEMANNschen Fläche (B.) denselben oder den entgegengesetzten Werth annimmt.

Es sei demnach

$$\text{(1.)} \qquad u_1 = \tilde{\omega}_1(s_1, z_1),$$

so ist

$$\text{(2.)} \qquad u_2 = \pm u_1 = \tilde{\omega}_1(s_2, z_2).$$

Gilt in dieser Gleichung das obere Vorzeichen, so folgt

$$\text{(3.)} \qquad \sqrt{S(u_2)} = -\sqrt{S(u_1)}.$$

1) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

Gilt in Gleichung (2.) das untere Vorzeichen, so ergiebt sich zunächst, dass $S(u)$ nur gerade Potenzen von u enthalten darf, und es ist

(3a.) $$\sqrt{S(u_2)} = \pm\sqrt{S(u_1)}.$$

Demnach sind die beiden involutorisch gepaarten Stellen in der zwei- [196
blättrigen RIEMANNschen Fläche, welche den durch die Gleichung (K.) einander zugeordneten Stellen der RIEMANNschen Fläche (B.) entsprechen, entweder

(M.) $$\begin{cases} u_2 = u_1, \\ \sqrt{S(u_2)} = -\sqrt{S(u_1)} \end{cases}$$

oder

(M'.) $$\begin{cases} u_2 = -u_1, \\ \sqrt{S(u_2)} = \pm\sqrt{S(u_1)}. \end{cases}$$

Im letzteren Falle enthält $S(u)$ nur gerade Potenzen von u.

Die Gleichungen (E.) und (F.) verwandeln sich im Falle (M.) in

(E'.) $$2D\sqrt{S(u)} = \frac{d\log}{du}\left(\frac{A - B\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right),$$

(F'.) $$\frac{K + L\sqrt{S(u)}}{K - L\sqrt{S(u)}} = \left(\frac{A - B\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right)^2,$$

wenn durch die Substitution (L.)

(4.) $$-\tfrac{1}{8}G(s,z)\,dz = [C + D\sqrt{S(u)}]\,du,$$

(5.) $$P(s,z) = K + L\sqrt{S(u)}$$

wird.

Im Falle (M'.) verwandeln sich (E.) und (F.) in

(E$^{(3)}$.) $$C + C_1 + (D \pm D_1)\sqrt{S} = \frac{d\log}{du}\left[\frac{A_1 \pm B_1\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right],$$

(F$^{(3)}$.) $$\frac{K + L\sqrt{S(u)}}{K_1 \pm L_1\sqrt{S(u)}} = \left(\frac{A_1 \pm B_1\sqrt{S(u)}}{A + B\sqrt{S(u)}}\right)^2,$$

wenn wir noch mit dem unteren Index Eins andeuten, dass u durch $-u$ ersetzt ist.

5.

Ist der Rang p der Gleichung (B.) gleich Null, so giebt es bekanntlich eine rationale Function

$$u = R(s, z)$$

von s und z von der Beschaffenheit, dass

$$(L_1.) \qquad z = \psi_1(u), \quad s = \psi_2(u),$$

wo ψ_1, ψ_2 rationale Functionen von u bedeuten.

197] Die beiden Werthenpaare u_1, u_2, welche den durch die Gleichungen (K.) involutorisch conjugirten Werthenpaaren (s_1, z_1), (s_2, z_2) entsprechen, müssen alsdann offenbar gegenseitig lineare Functionen von einander sein, und zwar so, dass die Gleichung zwischen u_1 und u_2

$$(M_1.) \qquad Au_1u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0,$$

wo A, B, C bestimmte Constanten, in Bezug auf u_1 und u_2 symmetrisch ist.

Es sei

$$(1.) \qquad u = \frac{\lambda v + \mu}{\nu v + \varrho},$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ Constanten, die der Beschränkung unterliegen

$$(2.) \qquad A\lambda^2 + 2B\lambda\nu + C\nu^2 = 0.$$

Sind alsdann v_1, v_2 die u_1, u_2 resp. entsprechenden Werthe von v, so geht die Gleichung (M.) in eine von der folgenden Form über

$$(3.) \qquad v_1 + v_2 + D = 0,$$

wo D eine Constante bedeutet.

Es sei endlich

$$(4.) \qquad v + \frac{D}{2} = t,$$

so verwandelt sich Gleichung (3.) in

$$(M_2.) \qquad t_2 = -t_1,$$

wenn t_1, t_2 die v_1, v_2 entsprechenden Werthe von t bedeuten.

Die Gleichung $(L_1.)$ geht in

$$(L_2.) \qquad s = \varepsilon_1(t), \quad s = \varepsilon_2(t)$$

über, während die Gleichungen (E.) und (F.) sich in

$$(E_1.) \qquad \Omega(t) + \Omega(-t) = \frac{d \log}{dt}\left(\frac{\varepsilon_1'(-t)}{\varepsilon_1'(t)}\right)$$

und

$$(F_1.) \qquad \frac{\Pi(-t)}{\Pi(t)} = \left(\frac{\varepsilon_1'(t)}{\varepsilon_1'(-t)}\right)^3$$

verwandeln, wenn durch die Substitution $(L_2.)$

$$(5.) \qquad -\frac{1}{3} G(s, z)\frac{dz}{dt} = \Omega(t),$$

$$(6.) \qquad P(s, z) = \Pi(t)$$

wird, und wenn wir

$$(7.) \qquad \frac{dz_1(t)}{dt} = \varepsilon_1'(t)$$

setzen.

6. [198

Es seien jetzt umgekehrt $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$ zwei Stellen der RIEMANNschen Fläche (B.), welche gleichzeitig die beiden Gleichungen (E.) und (F.) befriedigen.

Ist alsdann

$$(1.) \qquad y = f(s_1, z_1)$$

ein Integral der Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{d^2y}{dz_1^2} + G(s_1, z_1)\frac{dy}{dz_1} + H(s_1, z_1)y = 0,$$

und fassen wir dasselbe als Function der durch die Gleichungen (E.) und (F.) mit z_1 verbundenen Variablen z_2 auf, indem wir setzen

$$(3.) \qquad \frac{dz_2}{dz_1} = X,$$

$$(4.) \qquad y = X\omega,$$

so ergiebt sich

$$(5.) \qquad X^3\frac{d^2\omega}{dz_2^2} + \left[3X\frac{dX}{dz_1} + G(s_1, z_1)X^2\right]\frac{d\omega}{dz_2} + \left[\frac{d^2X}{dz_1^2} + G(s_1, z_1)\frac{dX}{dz_1} + H(s_1, z_1)X\right]\omega = 0.$$

Gemäss der ersten der beiden Gleichungen (8.) in No. 1 ist

$$3X\frac{dX}{dz_1} + G(s_1, z_1)X^3 = G(s_2, z_2)X^3 \tag{6.}$$

und

$$\frac{d^2X}{dz_1^2} + G(s_1, z_1)\frac{dX}{dz_1} + H(s_1, z_1)X = H(s_2, z_2)X^3. \tag{7.}$$

Demnach verwandelt sich Gleichung (5.) in

$$X^3\left[\frac{d^2\omega}{dz_2^2} + G(s_2, z_2)\frac{d\omega}{dz_2} + H(s_2, z_2)\omega\right] = 0. \tag{8.}$$

Wir erhalten also die Beziehung

$$f(s_1, z_1)\frac{dz_1}{dz_2} = Af(s_2, z_2) + B\varphi(s_2, z_2), \tag{9.}$$

wo A, B Constanten bedeuten.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$\varphi(s_1, z_1)\frac{dz_1}{dz_2} = A'f(s_2, z_2) + B'\varphi(s_2, z_2), \tag{10.}$$

wo A', B' Constanten sind.

199] Differentiirt man die Gleichungen (9.) und (10.) nach z_2, eliminirt $\frac{ds_1^2}{dz_2^2}$, multiplicirt alsdann mit $\frac{ds_1}{dz_2}$ und wendet abermals die Gleichungen (9.) und (10.) an, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (E.)

$$AB' - A'B = 1. \tag{11.}$$

Setzen wir jetzt voraus, dass

$$\frac{\varphi(s_2, z_2)}{f(s_2, z_2)} = \frac{\varphi(s_1, z_1)}{f(s_1, z_1)}, \tag{12.}$$

so folgt, dass

$$B = 0, \quad A' = 0, \tag{13.}$$

demnach

$$A = B' = \pm 1, \tag{14.}$$

d. h.

Solche Werthenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), für welche die Gleichungen (D.), (E.), (F.) gleichzeitig erfüllt werden, befriedigen auch gleichzeitig die beiden Gleichungen (C.).

7.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen ergiebt sich das Resultat:

Die nothwendigen Bedingungen dafür, dass alle Werthenpaare $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$, welche der Gleichung (D.) Genüge leisten, auch gleichzeitig die beiden Gleichungen (C'.) befriedigen, und die hinreichenden dafür, dass sie gleichzeitig die beiden Gleichungen (C.) befriedigen, sind, von dem Ausnahmefalle Gleichung (1.) No. 2 abgesehen, die folgenden:

I. Für $p > 0$.

Es muss die die Gleichung (B.) darstellende RIEMANNsche Fläche sich durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution (L.) auf eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche $(u, \sqrt{S(u)})$ abbilden lassen, und zwar derart, dass die Gleichung

$$\text{(A'.)} \qquad \frac{d^2y}{du^2} + G'(u, \sqrt{S(u)})\frac{dy}{du} + H'(u, \sqrt{S(u)})y = 0,$$

mit in $u, \sqrt{S(u)}$ rationalen Coefficienten, welche durch die Substitution (L.) aus (A.) hervorgeht, die Eigenschaft hat, dass u^2 eine eindeutige Function des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen derselben werde.

Es müssen ferner die Gleichungen (E'.) und (F'.), resp. ($E^{(2)}$.) und ($F^{(2)}$.) identisch erfüllt werden, je nachdem u eine einwerthige oder eine zweiwerthige Function von ζ ist.

II. Für $p = 0$. [200

Die Gleichung

$$\text{(A}_1\text{.)} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + G^{(2)}(t)\frac{dy}{dt} + H^{(2)}(t)y = 0$$

mit in t rationalen Coefficienten, welche aus (A.) durch die Substitution (L_2.) hervorgeht, muss die Eigenschaft haben, dass t^2 eine einwerthige Function des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen derselben sei, und die Gleichungen (E_1.) und (F_1.) müssen identisch erfüllt werden.

Berlin, Juli 1886.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 429, Zeile 6 v. u. Wir bezeichnen statt Bezeichnen wir,

„ 432, Gl. (6.) $e^{\frac{1}{2}\int P(s,z)^{\frac{1}{2}}\,dz}$ statt $e^{\frac{1}{2}\int P(s,z)\,dz}$,

„ 436, Zeile 5 z statt s_1,

2) **Zu S. 428, Zeile 5, 4 v. u.** Der Sitzungsbericht der K. preuss. Akademie der Wissenschaften vom 30. Juli 1885 (XXXVIII, S. 759) enthält die folgende Angabe: »Herr FUCHS las über eine Klasse linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Mittheilung wird in einem der folgenden Berichte erscheinen«.

Zu den Nummern 4—7 vergl. die Abhandlung LI. SCH.

L.

ÜBER DIE UMKEHRUNG VON FUNCTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, VIII, S. 99—108; vorgetragen am 10. Februar; ausgegeben am 17. Februar 1887.)

In einer in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissen- [99
schaften zu Göttingen*) veröffentlichten Arbeit habe ich Differentialgleichungen der Form

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{y_1} + \dfrac{dz_2}{y_2} = du_1, \\ \dfrac{dz_1}{w_1} + \dfrac{dz_2}{w_2} = du_2 \end{cases}$$

betrachtet, und, unter der Voraussetzung, dass y_1, w_1 gegebene Functionen der Variablen z_1, und y_2, w_2 die Werthe derselben Functionen für eine Variable z_2 sind, die Bedingungen zu ermitteln gesucht, unter welchen $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ eindeutige Functionen von u_1, u_2 werden.

Im Folgenden beschäftige ich mich mit denselben Gleichungen ($\alpha.$) unter einem von dem früheren verschiedenen Gesichtspunkte. Ich setze nämlich voraus, dass z_1, z_2 gegebene Functionen von u_1, u_2 sind, und behandele zunächst die Frage, wie dieselben zu wählen sind, damit y_1, w_1 blosse Functionen der Variablen z_1, y_2, w_2 aber blosse Functionen von z_2 werden. Es ergiebt sich

*) 8. Januar 1881[1]).

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

als die allgemeinste Lösung dieses Problems, dass z_1, z_2 willkürliche Functionen sein müssen, die erstere einer Variablen ζ_1, die andere einer Variablen ζ_2, und dass ζ_1, ζ_2 den Differentialgleichungen

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_1} + \zeta_1 \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} = 0 \end{cases}$$

zu genügen haben.

Hierauf werden die Functionen z_1, z_2 von u_1, u_2, für welche y_1, w_1 blosse Functionen von z_1 und y_2, w_2 blosse Functionen von z_2 werden, noch der [100] Bedingung unterworfen, dass $z_1 + z_2$, und $z_1 z_2$ innerhalb bestimmter Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 eindeutige Functionen dieser Variablen seien. Ich werde hierdurch auf einem neuen Wege zu dem Fundamentaltheorem geführt, welches ich in meiner oben citirten Arbeit in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen[1]) No. 4 Gleichung (C.) gegeben, und aus welchem ich in No. 8 und No. 9 derselben Arbeit die Folgerung gezogen habe, dass z sich derart als zweiwerthige Function einer Variablen ζ darstellen lasse, dass hierdurch die Gleichungen (α) in die Form

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} \sqrt{\Psi(\zeta_1)}\, d\zeta_1 + \sqrt{\Psi(\zeta_2)}\, d\zeta_2 = du_1, \\ \zeta_1 \sqrt{\Psi(\zeta_1)}\, d\zeta_1 + \zeta_2 \sqrt{\Psi(\zeta_2)}\, d\zeta_2 = du_2 \end{cases}$$

übergehen, wo $\Psi(\zeta)$ eine eindeutige Function der Variablen ζ bedeutet.

Ich schliesse an diese Untersuchung eine Bemerkung, welche zum Zwecke hat, das Gebiet der Variablen ζ, innerhalb dessen die Functionen z und $\Psi(\zeta)$ dieser Veränderlichen bez. zwei- und einwerthig sein müssen, näher zu bestimmen.

1.

Es mögen zwischen den veränderlichen Grössen z_1, z_2, u_1, u_2 die Gleichungen

$$(A.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{y_1} + \dfrac{dz_2}{y_2} = du_1, \\ \dfrac{dz_1}{w_1} + \dfrac{dz_2}{w_2} = du_2 \end{cases}$$

bestehen.

[1]) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Aus denselben ergeben sich die identischen Gleichungen

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}, & \dfrac{1}{y_2} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}, \\ \dfrac{1}{w_1} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}, & \dfrac{1}{w_2} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}, \end{cases}$$

wenn wir

$$\text{(1.)} \qquad \lambda = \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1}$$

setzen.

Sind z_1, z_2 bestimmte Functionen von u_1, u_2, so werden durch die Gleichungen (B.) y_1, y_2, w_1, w_2 ebenfalls als bestimmte Functionen von u_1, u_2 definirt. Demgemäss sind y_1, w_1, y_2, w_2 auch bestimmte Functionen der Variablen z_1, z_2.

Wir wollen nunmehr z_1, z_2 so als Functionen von u_1, u_2 bestimmen, [101 dass durch die Gleichungen (B.) y_1 und w_1 als blosse Functionen der Variablen z_1, dagegen y_2 und w_2 als blosse Functionen der Variablen z_2 definirt werden.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass y_1 und w_1 blosse Functionen von z_1 werden, ist das Bestehen der Gleichungen

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2} - \dfrac{\partial y_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} = 0, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2} - \dfrac{\partial w_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} = 0 \end{cases}$$

oder, wenn wir setzen

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} P = \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial u_1 \partial u_2}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} - \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial u_1^2}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}, \\ Q = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial u_1^2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial u_1 \partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}, \\ R = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial u_1 \partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial u_2^2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}, \\ S = \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial u_2^2}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} - \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial u_1 \partial u_2}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}. \end{cases}$$

$$\text{(C.)} \qquad \begin{cases} (P+Q)\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - R\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - S\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} = 0, \\ (R+S)\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} - P\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - Q\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} = 0. \end{cases}$$

Das Grössenpaar P, Q einerseits und das Grössenpaar R, S andererseits haben die Eigenschaft, dass sie sich mit den entgegengesetzten Zeichen gegenseitig vertauschen, wenn z_1 mit z_2 vertauscht wird. Hieraus ergiebt sich, dass das Bestehen der Gleichungen (2.) oder (C.) zu gleicher Zeit die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür enthält, dass y_2 und w_2 blosse Functionen der Variablen z_2 sind.

Sind demnach die Gleichungen (C.) erfüllt, so ist

$$\text{(D.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} = f_1(z_1), & \dfrac{1}{y_2} = f_2(z_2), \\ \dfrac{1}{w_1} = \varphi_1(z_1), & \dfrac{1}{w_2} = \varphi_2(z_2), \end{cases}$$

wo $f_1(z_1)$ und $\varphi_1(z_1)$ blosse Functionen von z_1, $f_2(z_2)$ und $\varphi_2(z_2)$ blosse Functionen von z_2 bedeuten.

Und wenn umgekehrt die Gleichungen (D.) bestehen, so genügen z_1, z_2 den Gleichungen (C.).

102] 2.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dass z_1, z_2 den Gleichungen (C.) genügen, und es werde

$$\text{(E.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(z_1)}{f_1(z_1)} = \dfrac{y_1}{w_1} = \zeta_1, \\ \dfrac{\varphi_2(z_2)}{f_2(z_2)} = \dfrac{y_2}{w_2} = \zeta_2 \end{cases}$$

gesetzt, nachdem y_1, y_2, w_1, w_2 durch die Gleichungen (B.) bestimmt worden.

Die Gleichungen (E.) definiren zwei Functionen ζ_1, ζ_2 bez. von z_1, z_2, welche als Functionen von u_1, u_2, den Gleichungen (B.) zufolge, die Gleichungen

$$\text{(F.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_1} + \zeta_1 \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} = 0 \end{cases}$$

befriedigen.

Aus den Gleichungen (E.) ergiebt sich

$$\text{(G.)} \qquad z_1 = \psi_1(\zeta_1), \quad z_2 = \psi_2(\zeta_2),$$

wo ψ_1, ψ_2 bestimmte Functionen bez. von ζ_1, ζ_2 bedeuten.

Es seien umgekehrt die beiden Functionen

$$z_1 = \psi_1(\zeta_1), \quad z_2 = \psi_2(\zeta_2)$$

bez. der Variablen ζ_1, ζ_2 vorgeschrieben und ζ_1, ζ_2 als Functionen von u_1, u_2 den Gleichungen (F.) gemäss bestimmt, so werden hierdurch auch z_1, z_2 als Functionen von u_1, u_2 definirt. Für diese Functionen z_1, z_2 werden y_1 und w_1 blosse Functionen von z_1, y_2 und w_2 blosse Functionen von z_2.

Sind nämlich $\Phi_1(z_1), \Phi_2(z_2)$ zwei beliebige Functionen von z_1, bez. z_2, so sind dieselben auch Functionen von ζ_1, bez. ζ_2, und es ergiebt sich für $\Phi_1(z_1), \Phi_2(z_2)$ als Functionen von u_1, u_2 nach den Gleichungen (F.)

$$\text{(H.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} + \zeta_2 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} + \zeta_1 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} = 0. \end{cases}$$

Ist insbesondere

$$\Phi_1(z_1) = z_1, \quad \Phi_2(z_2) = z_2,$$

so ergeben die Gleichungen (H.)

$$\text{(J.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\zeta_2, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}\zeta_1, \end{cases}$$

also [103

$$\text{(B'.)} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2), \\ y_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2), \qquad y_2 = -\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2), \\ w_1 = \dfrac{y_1}{\zeta_1}, \qquad w_2 = \dfrac{y_2}{\zeta_2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (F.) ergiebt sich ferner

$$\text{(F'.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_1 \partial u_2} = -\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} - \zeta_2 \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_2^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_1^2} = (\zeta_1 + \zeta_2)\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} + \zeta_2^2 \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u_2^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_1 \partial u_2} = -\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} - \zeta_1 \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_2^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_1^2} = (\zeta_1 + \zeta_2)\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u_2} + \zeta_1^2 \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial u_2^2}. \end{cases}$$

Bilden wir hiernach aus (B'.) $\frac{\partial y_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial y_1}{\partial u_2}$ und substituiren die Werthe derselben, so wie die Werthe von $\frac{\partial z_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}$ mit Berücksichtigung von (J.) in die Gleichungen (2.) No. 1, so werden dieselben identisch befriedigt, woraus hervorgeht, dass y_1 eine blosse Function von z_1 wird. Da aber

$$w_1 = \frac{y_1}{\zeta_1},$$

und da ζ_1 eine blosse Function von z_1, so folgt, dass auch w_1 eine blosse Function von z_1 darstellt. Nach No. 1 ergiebt sich alsdann, dass auch y_2 und w_2 blosse Functionen von z_2 werden. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Sind $\psi_1(\zeta_1), \psi_2(\zeta_2)$ willkürliche Functionen von ζ_1 bez. ζ_2, und ζ_1, ζ_2 Functionen von u_1, u_2, welche den Gleichungen (F.) Genüge leisten, so enthalten die Gleichungen

$$(G.) \qquad z_1 = \psi_1(\zeta_1), \quad z_2 = \psi_2(\zeta_2)$$

die sämmtlichen Functionenpaare z_1, z_2 der Variablen u_1, u_2, für welche in den Gleichungen (A.) y_1 und w_1 blosse Functionen der Variablen z_1, dagegen y_2 und w_2 blosse Functionen der Variablen z_2 darstellen.

Das Functionenpaar y_1, y_2 so wie das Functionenpaar w_1, w_2 der Variablen u_1, u_2, wie sie durch die Gleichungen (B'.) bestimmt werden, genügen den Gleichungen (H.).

104] 3.

Es sei

$$(K.) \qquad \begin{cases} z_1 = \psi + \Delta, \\ z_2 = \psi - \Delta, \\ \zeta_1 = a + D, \\ \zeta_2 = a - D, \end{cases}$$

so ergiebt sich daraus, dass in den Gleichungen (H.) z_1, z_2 an die Stelle von Φ_1, Φ_2 bez. gesetzt werden kann,

$$(1.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial u_1} + \frac{\partial\Delta}{\partial u_1} + \zeta_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_2} + \frac{\partial\Delta}{\partial u_2}\right) = 0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial u_1} - \frac{\partial\Delta}{\partial u_1} + \zeta_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_2} - \frac{\partial\Delta}{\partial u_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Durch Addition und Subtraction folgt aus diesen Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} -a\dfrac{\partial\psi}{\partial u_2}+D\dfrac{\partial\Delta}{\partial u_2}=\dfrac{\partial\psi}{\partial u_1}, \\ -a\dfrac{\partial\Delta}{\partial u_2}+D\dfrac{\partial\psi}{\partial u_2}=\dfrac{\partial\Delta}{\partial u_1}. \end{cases}$$

Demnach ist

$$(L.)\qquad \mu D=\varepsilon,\quad \mu a=\varepsilon',$$

wo

$$\mu=\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\Delta}{\partial u_2}\right)^2,$$

$$\varepsilon=\frac{\partial\Delta}{\partial u_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}-\frac{\partial\Delta}{\partial u_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_1},$$

$$\varepsilon'=\frac{\partial\Delta}{\partial u_1}\frac{\partial\Delta}{\partial u_2}-\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}.$$

Aus den Gleichungen (F.) ergiebt sich ferner

$$(F^{(3)}.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u_1}+a\dfrac{\partial a}{\partial u_2}-D\dfrac{\partial D}{\partial u_1}=0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial u_1}+a\dfrac{\partial D}{\partial u_2}-D\dfrac{\partial a}{\partial u_2}=0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (D.) und (B'.) ergiebt sich

$$(B^{(3)}.)\qquad \begin{cases} f_1(z_1)=\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2)}, & f_2(z_2)=-\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2)}, \\ \varphi_1(z_1)=\zeta_1 f_1(z_1), & \varphi_2(z_2)=\zeta_2 f_2(z_2). \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $f_k'(z_k)$ und $\varphi_k'(z_k)$ bez. die Ableitungen von $f_k(z_k)$ und $\varphi_k(z_k)$ nach z_k, so folgt durch die Differentiation der Gleichungen $(B^{(3)}.)$

$$(3.)\qquad \begin{cases} f_1'(z_1)=\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left[\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2)}\right]=\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left[\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2)}\right], \\ \varphi_1'(z_1)=\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left[\dfrac{\zeta_1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2)}\right]=\dfrac{1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left[\dfrac{\zeta_1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}(\zeta_1-\zeta_2)}\right], \end{cases}$$

[105

also, wenn wir

(M.) $$\varphi_1'(z_1)f_1(z_1) - \varphi_1(z_1)f_1'(z_1) = F_1(z_1)$$

setzen,

(4.) $$F_1(z_1) = \frac{1}{y_1^2}\frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial u_1}}{\frac{\partial z_1}{\partial u_1}} = \frac{1}{y_1^2}\frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial u_2}}{\frac{\partial z_1}{\partial u_2}}.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn wir

(M'.) $$\varphi_2'(z_2)f_2(z_2) - f_2'(z_2)\varphi_2(z_2) = F_2(z_2)$$

setzen,

(5.) $$F_2(z_2) = \frac{1}{y_2^2}\frac{\frac{\partial \zeta_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial z_2}{\partial u_1}} = \frac{1}{y_2^2}\frac{\frac{\partial \zeta_2}{\partial u_2}}{\frac{\partial z_2}{\partial u_2}}.$$

Aus (4.) und (5.) folgt alsdann

(N.) $$F_1(z_1)f_2(z_2)^2 + F_2(z_2)f_1(z_1)^2 = \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)}{y_1^2 y_2^2}\frac{\partial}{\partial u_2}(\zeta_1 - \zeta_2).$$

4.

Es seien Σ_1, Σ_2 zwei wohlbestimmte Gebiete der Veränderlichen u_1, u_2 bez., innerhalb deren eine Lösung z_1, z_2 der Gleichungen (C.) existire von der Beschaffenheit, dass innerhalb derselben Gebiete ψ und Δ^2 eindeutige Functionen von u_1, u_2 darstellen. Aus den Gleichungen (L.) ergiebt sich, dass alsdann innerhalb derselben Gebiete die beiden Functionen ζ_1, ζ_2 der Variablen u_1, u_2 existiren, und dass a und D^2 ebenfalls einwerthige Functionen dieser Variablen darstellen.

Den Gebieten Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 mögen die Gebiete S_1, S_2 der Variablen ζ_1, ζ_2 bez. und die Gebiete T_1, T_2 der Variablen z_1, z_2 bez. entsprechen.

Es sei

(1.) $$\Delta = \sqrt{R}, \quad D = \sqrt{S},$$

so folgt aus der ersteren der Gleichungen (L.)

(2.) $$\left\{\begin{array}{c} \sqrt{S} = \frac{1}{2}\sqrt{R}\,T \\ \text{oder} \\ S = \frac{1}{4}RT^2, \end{array}\right.$$

wo [106

$$(3.)\quad \begin{cases} T = \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}, \\ \varepsilon_1 = \frac{\partial R}{\partial u_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_2} - \frac{\partial R}{\partial u_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \\ \mu_1 = R\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R}{\partial u_2}\right)^2. \end{cases}$$

Die Function T von u_1, u_2 ist innerhalb der Gebiete Σ_1, Σ_2 dieser Veränderlichen eindeutig. Den Gleichungen (B'.) zu Folge ist

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1 = \quad 2\frac{\partial z_1}{\partial u_2} D, \\ y_2 = -2\frac{\partial z_2}{\partial u_2} D. \end{cases}$$

Daher ist, wenn man für z_1, z_2 ihre Werthe aus (K.) substituirt

$$y_1 y_2 = -\frac{4\mu_1}{R} D^2,$$

also nach Gleichung (2.)

$$(5.)\qquad y_1 y_2 = -\mu_1 T^2.$$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung (N.) ein, so erhalten wir

$$(O.)\quad F_1(z_1) f_2(z_2)^2 + F_2(z_2) f_1(z_1)^2 = \frac{1}{2y_1^2 y_2^2}\frac{\partial}{\partial u_2}[RT^2] = -\frac{1}{2\mu_1^2 T^6}\frac{\partial}{\partial u_2}[RT^2].$$

Die Werthsysteme u_1, u_2, für welche die Gleichung

$$(P.)\qquad \zeta_1 = \zeta_2$$

erfüllt wird, werden durch die Gleichung

$$(6.)\qquad D = 0$$

geliefert, also nach Gleichung (2.) entweder durch

$$(7.)\qquad R = 0$$

oder durch

$$(7a.)\qquad T = 0.$$

In dem Falle, für welchen Gleichung (7.) stattfindet, ergiebt sich aus (K.)

$$(8.)\qquad z_1 = z_2$$

und aus den Gleichungen (4.)

(8a.) $$y_1 = y_2, \quad w_1 = w_2$$

wenigstens für endliche Werthe von z_1, z_2.

In dem Falle, dass R von Null verschieden, dass aber die Gleichung (7a.) erfüllt ist, ergiebt sich zunächst, dass für die durch diese Gleichung verbundenen Werthsysteme von u_1, u_2 entweder z_1, z_2 vereinzelte Werthe erhalten oder die Functionen $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \frac{\partial z_2}{\partial u_2}$ unendlich
107] werden, ohne dass z_1, z_2 einen unendlich grossen constanten Werth annehmen, und zwar sind alsdann $\frac{\partial z_1}{\partial u_2} T, \frac{\partial z_2}{\partial u_2} T$ von Null verschieden.

Wenn nämlich $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \frac{\partial z_2}{\partial u_2}$ für die genannten Werthsysteme von u_1, u_2 endlich wären, so würde nach Gleichung (4.) auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$; es würden also, wenn nicht für dieselben Werthsysteme von u_1, u_2 die Grössen z_1, z_2 vereinzelt sind, die Function y_1 von z_1 und die Function y_2 von z_2 innerhalb gewisser Theile der Gebiete T_1, T_2 bez. der Variablen z_1, z_2 den constanten Werth Null annehmen.

So lange demnach u_1, u_2 sich unabhängig von einander ändern, wird die Gleichung (P.) nur befriedigt, entweder für solche vereinzelte Werthsysteme z_1, z_2, für welche

$$f_1(z_1) = \infty, \quad f_2(z_2) = \infty, \quad \varphi(z_1) = \infty, \quad \varphi(z_2) = \infty,$$

oder für solche Werthsysteme, welche die Gleichungen (8.) und (8a.) zur Folge haben.

Wenn aber die Änderungen der Variablen u_1, u_2 durch die Gleichung (7a.) von einander abhängig werden, ohne für z_1, z_2 vereinzelte Werthsysteme zu liefern, so müssen die diese Gleichung befriedigenden Werthsysteme u_1, u_2 sich so ändern, dass die Functionen $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \frac{\partial z_2}{\partial u_2}$ unendlich, y_1, y_2 aber von Null verschieden werden.

Dann verschwindet aber die rechte Seite der Gleichung (N.) für dieselben Werthsysteme, und wir erhalten den folgenden Satz:

Es seien innerhalb bestimmter Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 durch die Gleichungen (C.) z_1+z_2 und $z_1 z_2$ als eindeutige Functionen derselben definirt, und es mögen mit T_1, T_2 die den Gebieten Σ_1, Σ_2 entsprechenden Gebiete von z_1, z_2 bez. bezeichnet

werden. Sind z_1, z_2 so beschaffen, dass die von ihnen abhängigen Functionen y_1, y_2 nicht in gewissen Theilen der Gebiete T_1, T_2 verschwinden können, so wird durch alle Werthsysteme z_1, z_2, für welche die Gleichung (P.) oder die mit ihr gleichbedeutende

$$(P'.) \qquad \begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_2) \\ \varphi_1(z_1) & \varphi_2(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

befriedigt wird, — ausgenommen die Werthe, für welche

$$z_1 = z_2, \quad y_1 = y_2,$$

oder die vereinzelten Werthsysteme von z_1, z_2, für welche y_1, w_1, y_2, w_2 verschwinden, — gleichzeitig die Gleichung

$$(Q.) \qquad F_1(z_1) f_2(z_2)^3 + F_2(z_2) f_1(z_1)^3 = 0$$

erfüllt. Diese Werthsysteme werden von den Functionen z_1, z_2 der Variablen u_1, u_2 nicht erreicht, so lange u_1, u_2 sich unabhängig von einander ändern.

5. [108

Der eben ausgesprochene Satz ist in Übereinstimmung mit den beiden Theoremen, welche ich in der No. 4 Theorem I. und II. der oben citirten Arbeit in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen[1]) gegeben habe.

Aus diesem Satze habe ich daselbst (No. 8 und No. 9) gefolgert, dass aus der Gleichung

$$(E.) \qquad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \zeta$$

z sich als zweiwerthige Function von ζ ergiebt, sowie dass

$$\left(f(z)\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 = \Psi(\zeta) \quad \text{und} \quad \left(\varphi(z)\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 = \zeta^2\Psi(\zeta)$$

einwerthige Functionen derselben Variablen sind.

Es ist nicht überflüssig, hieran eine Bemerkung zu knüpfen, um den Sinn dieser Folgerungen näher zu präcisiren.

---

1) Abh. XXXV, S. 239 ff. dieses Bandes. Sch.

Wenn $f(z)$, $\varphi(z)$ gegebene Functionen von z und z_1, z_2 unbeschränkt veränderliche Grössen sind, so erfüllen die Variablen u_1, u_2, welche mit diesen Veränderlichen durch die Gleichungen

$$(1.) \qquad \begin{cases} f(z_1)\,dz_1 + f(z_2)\,dz_2 = du_1 \\ \varphi(z_1)\,dz_1 + \varphi(z_2)\,dz_2 = du_2 \end{cases}$$

verbunden sind, gewisse wohldefinirte Gebiete Σ_1, Σ_2. Diesen Gebieten entsprechen Werthgebiete der Variablen ζ_1, ζ_2, die wir oben mit S_1, S_2 bezeichnet haben.

Sei S das Gebiet einer Variablen ζ, welches sich aus den Werthbereichen S_1, S_2 zusammensetzt, so ist der Sinn der erwähnten Folgerung der, dass, wenn $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ innerhalb der Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variablen u_1, u_2 eindeutige Functionen derselben sein sollen, innerhalb des Gebietes S der Variablen ζ die Grösse z eine zweiwerthige und $\Psi(\zeta)$ eine einwerthige Function dieser Variablen sein muss.

Ausserhalb des Gebietes S existiren diese Functionen von ζ entweder gar nicht, oder wenn sie existiren, so ist es nicht erforderlich, dass sie daselbst nur zwei bez. einen Werth für jeden Werth der Variablen ζ annehmen.

Das Gleiche bleibt selbstverständlich bestehen, wenn auch die Bereiche der Veränderlichkeit für z_1, z_2 beschränkte sind.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde eingefügt:

S. 445, Zeile 9 »den«,

„ 452, „ 11 »der Gebiete«. SCH.

LI.

ÜBER EINEN SATZ AUS DER THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN, UND ÜBER EINE ANWENDUNG DESSELBEN AUF DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, XI, S. 159—166; vorgetragen am 24. Februar; ausgegeben am 3. März 1887.)

In den Sitzungsberichten*) habe ich den Satz bewiesen, dass eine [159 algebraische RIEMANNsche Fläche, welche eine algebraische Involution zulässt, durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution in eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche verwandelt werden könne. Es ist nicht überflüssig hervorzuheben, dass ich daselbst stillschweigend von der Voraussetzung ausgegangen bin, dass zwischen den Perioden πi und a_{kl} der von RIEMANN in seiner Theorie der ABELschen Functionen**) eingeführten Normalintegrale erster Gattung keine Relation mit ganzzahligen Coefficienten stattfindet. Im Folgenden soll diese Voraussetzung näher erörtert werden, indem ich zeige, dass das Vorhandensein einer Involution $(s, z), (\sigma, \zeta)$ in einer RIEMANNschen Fläche (s, z) im Allgemeinen zur Folge hat, dass diese Fläche durch eine eindeutig umkehrbare rationale Substitution — wenn nicht in eine zweiblättrige — in eine solche RIEMANNsche Fläche (t, u) transformirbar ist, für

*) 22. Juli 1886, S. 797 [1]).

**) BORCHARDTs Journal, Bd. 54, No. 18 [2]).

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Riemanns Werke (1892), S. 129. Sch.

welche die Stellen (t, u) und $(-t, -u)$ der Involution (s, z), (σ, ζ) der ursprünglichen Fläche entsprechen.

Von den Resultaten der oben erwähnten Notiz*) habe ich**) eine Anwendung auf die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gemacht, indem ich die Bedingungen dafür entwickelte, dass die Werthenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche der Gleichung

$$f(s_1, z_1)\varphi(s_2, z_2) - f(s_2, z_2)\varphi(s_1, z_1) = 0$$

genügen, zu gleicher Zeit die Differentialgleichungen

160] $$f(s_1, z_1)dz_1 \pm f(s_2, z_2)dz_2 = 0,$$
$$\varphi(s_1, z_1)dz_1 \pm \varphi(s_2, z_2)dz_2 = 0$$

befriedigen, wenn unter $f(s, z)$, $\varphi(s, z)$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung verstanden wird, deren Coefficienten rationale Functionen des Ortes (s, z) einer algebraischen RIEMANNschen Fläche sind.

Das Wesentliche des daselbst***) gefundenen Resultats besteht in Folgendem.

Erstlich die RIEMANNsche Fläche (s, z), in welcher die Coefficienten der Differentialgleichung rational bestimmt sind, lässt sich durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution in eine andere (t, u) von der Beschaffenheit transformiren, dass t^2, u^2 eindeutige Functionen des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen werden.

Zweitens sind zwei wohl definirte algebraische Gleichungen (E'.), (F'.) oder ($E^{(2)}$.), ($F^{(2)}$.) daselbst identisch zu befriedigen.

Ich benutze diese Gelegenheit zu zeigen, dass dieses Resultat vollständig erhalten bleibt, wenn auch die Voraussetzung, dass zwischen den Perioden πi und a_{kl} nicht Relationen mit ganzzahligen Coefficienten stattfinden, fallen gelassen wird.

---

*) Sitzungsberichte, 1886, S. 797 [1]).

**) KRONECKERS Journal, Bd. 100, S. 189 [2]).

***) S. 199–200 und S. 196 Gleichungen (M.) und (M'.) [3]).

---

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) Abh. XLIX, S. 427 ff. dieses Bandes. Sch.

[3]) S. 439 und S. 435 dieses Bandes. Sch.

1.

Unter der Voraussetzung, dass die durch die algebraische Gleichung

(A.) $$F(s, z) = 0$$

definirte RIEMANNsche Fläche eine Involution zulässt, ist in meiner oben erwähnten Notiz*) gezeigt, dass ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung bestimmt werden kann, deren Differentialquotienten

$$G_1(s, z),\ G_2(s, z),\ \ldots,\ G_p(s, z)$$

die Gleichung

(K.) $$G_k(s, z)\,dz = \pm\, G_k(\sigma, \zeta)\,d\zeta \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

befriedigen, wenn (s, z), (σ, ζ) die eine Involution bildenden Stellen bezeichnen.

Es seien

$$u_1(s, z),\ u_2(s, z),\ \ldots,\ u_p(s, z)$$

die Normalintegrale erster Gattung, wie sie von RIEMANN**) eingeführt worden, und

$$G_1(s, z),\ G_2(s, z),\ \ldots,\ G_\lambda(s, z)$$

diejenigen Functionen $G_k(s, z)$, für welche in den Gleichungen (K.) das obere Vorzeichen,

$$G_{\lambda+1}(s, z),\ G_{\lambda+2}(s, z),\ \ldots,\ G_p(s, z)$$

diejenigen, für welche das untere Vorzeichen gilt, so ist, wenn wir mit A_{ik} Constanten bezeichnen und

$$\begin{aligned} V_i(s, z) &= \int [A_{i1} G_1(s, z) + A_{i2} G_2(s, z) + \cdots + A_{i\lambda} G_\lambda(s, z)]\,dz, \\ W_i(s, z) &= \int [A_{i,\lambda+1} G_{\lambda+1}(s, z) + A_{i,\lambda+2} G_{\lambda+2}(s, z) + \cdots + A_{ip} G_p(s, z)]\,dz \end{aligned} \qquad [161$$

setzen,

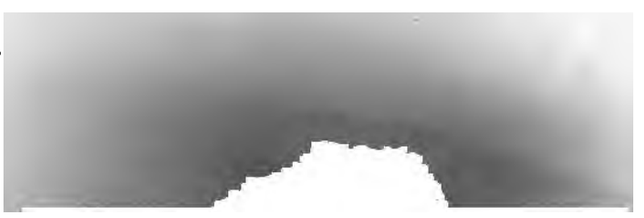
(1.) $$\begin{cases} u_i(s, z) &= V_i(s, z) + W_i(s, z) + \text{const.}, \\ u_i(\sigma, \zeta) &= V_i(s, z) - W_i(s, z) + \text{const.} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

*) Sitzungsberichte, 22. Juli 1886, S. 797[1]).

**) Theorie der ABELschen Functionen, No. 18 in BORCHARDTs Journal, Bd. 54[2]).

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 dieses Bandes. Sch.

[2]) Riemanns Werke (1892), S. 129. Sch.



Bilden wir längs der Begrenzung der einfach zusammenhangenden RIEMANNschen Fläche (s, z) das Integral

$$\int u_l(s, z)\, du_m(\sigma, \zeta),$$

so erhalten wir die Gleichung

$$(2.) \qquad \overset{ml}{B}(\pi i)^2 + \sum_1^p \overset{l}{B}_k a_{mk} \pi i - \sum_1^p a_{lr} \left[\overset{mr}{A} \pi i + \sum_1^p \overset{r}{A}_k a_{mk} \right] = 0,$$

wenn wir den Zuwachs, welchen $u_m(\sigma, \zeta)$ als Function von (s, z) beim Uberschreiten der Querschnitte a_r und b_r erleidet, mit

$$\overset{mr}{A} \pi i + \sum_1^p \overset{r}{A}_k a_{mk}$$

bez.

$$\overset{mr}{B} \pi i + \sum_1^p \overset{r}{B}_k a_{mk}$$

bezeichnen, wo $\overset{mr}{A}$, $\overset{mr}{B}$, $\overset{r}{A}_k$, $\overset{r}{B}_k$ ganze Zahlen bedeuten.

Sollen nun zwischen πi und a_{kl} nicht Relationen mit ganzzahligen Coefficienten erfüllt werden, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \overset{r}{A}_k = 0, & \overset{mr}{B} = 0, \\ \overset{mr}{A} = 0 \text{ für } r \gtrless m, & \overset{l}{B}_k = 0 \text{ für } k \gtrless l, \quad \overset{mm}{A} = B_l, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt, dass $\overset{mm}{A}$ einen von m unabhängigen Werth erhält, den wir mit α bezeichnen wollen.

Demnach wird $u_l(\sigma, \zeta)$ als Function von (s, z) beim Überschreiten des Querschnittes a_r, dessen Index von l verschieden, sich nicht ändern, und beim Überschreiten des Querschnittes a_l den Zuwachs $\alpha \pi i$ erfahren. Es ist daher nach einem bekannten Satze

$$u_l(\sigma, \zeta) - \alpha u_l(s, z)$$

eine Constante. Da aber die Functionen $G_k(s, z)$ linearunabhängig sind, so folgt aus Gleichung (1.), dass entweder

$$(4.) \qquad \alpha = 1, \quad W_l = 0$$

oder

$$(4a.) \qquad \alpha = -1, \quad V_l = 0$$

für jeden Werth des Index l, d. h. dass für sämmtliche Gleichungen [162 (K.) gleichzeitig entweder das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

2.

Nachdem nunmehr gezeigt ist, dass in den Gleichungen (K.) überall das nämliche Vorzeichen gilt, lässt sich der Beweis des in No. 3*) der obenerwähnten Notiz ausgesprochenen Satzes, dass man eine rationale Function von s, z bestimmen könne, welche nur in zwei Punkten der RIEMANNschen Fläche unendlich erster Ordnung wird, wesentlich vereinfachen. In der That ergiebt sich, dass alle adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Curve n^{ter} Ordnung $F(s,z)=0$ in einem Punkte (s,z) schneiden, auch durch den Punkt (σ,ζ) derselben Curve hindurchgehen. Dann aber folgt aus einem Theoreme des Herrn NÖTHER**), dass $F(s,z)=0$ eine hyperelliptische Curve ist.

Derselbe Satz ist in Übereinstimmung mit einem von Herrn HURWITZ***) gegebenen Theorem. Es ist nämlich unsere Involution, unter der Voraussetzung, dass in den Gleichungen (K.) überall dasselbe Vorzeichen gilt, in der Bezeichnungsweise des Herrn HURWITZ eine Werthigkeitscorrespondenz, deren Werthigkeit gleich der positiven oder der negativen Einheit ist.

3.

Ich habe schon oben hervorgehoben, dass ich in meiner oben erwähnten Notiz den daselbst†) enthaltenen Satz nur unter der Voraussetzung, dass zwischen den Periodicitätsmoduln πi und a_{kl} keine Relationen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen, aufgestellt habe.

In dem Falle jedoch, dass solche Relationen zugelassen werden, können in den Gleichungen (K.) verschiedene Vorzeichen auftreten. Es möge unter dieser Voraussetzung und unter Anwendung der Bezeichnungsweise von No. 1

*) S. 803 [1]).

**) Mathem. Annalen, Bd. 7, S. 286.

***) Im § 14 einer in den Berichten der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 11. Januar 1886, enthaltenen Arbeit, auf welche vor Kurzem der Herr Verfasser mich aufmerksam zu machen die Güte gehabt.

†) S. 803 [1]).

[1]) S. 434 dieses Bandes. Sch.

163]

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sum_1^{\lambda} c_k G_k(s,z)}{\sum_{\lambda+1}^{p} e_k G_k(s,z)} = u, \\ \dfrac{\sum_1^{\lambda} c_k' G_k(s,z)}{\sum_{\lambda+1}^{p} e_k' G_k(s,z)} = t \end{cases}$$

gesetzt werden, wo c_k, c_k', e_k, e_k' willkürliche Constanten bedeuten.

Alsdann findet zwischen t und u eine algebraische Gleichung statt

$$(2.)\qquad \Phi(t,u) = 0,$$

welche eine Curve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung repräsentirt.

Da t und u gleichzeitig für die Stelle (σ,ζ) der RIEMANNschen Fläche den entgegengesetzten von demjenigen Werthe besitzt, welcher in (s,z) erhalten wird, so ergiebt sich, dass die Gleichung (2.) ungeändert bleibt, wenn gleichzeitig $-t$ für t und $-u$ für u gesetzt wird.

Ist die Fläche $F(s,z) = 0$ nicht so beschaffen, dass eine rationale Function von s, z existirt, die nur in zwei Punkten der Fläche unendlich erster Ordnung wird, so sind auch umgekehrt s und z rationale Functionen von t und u*).

4.

Es seien die Functionen $f(s,z)$, $\varphi(s,z)$ des Ortes der RIEMANNschen Fläche

$$(1.)\qquad F(s,z) = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{d^2y}{dz^2} + G(s,z)\frac{dy}{dz} + H(s,z)y = 0,$$

wo $G(s,z)$, $H(s,z)$ rationale Functionen von s, z bedeuten.

Es wird verlangt, dass die Stellen (s_1,z_1), (s_2,z_2), für welche

$$(3.)\qquad f(s_1,z_1)\varphi(s_2,z_2) - f(s_2,z_2)\varphi(s_1,z_1) = 0,$$

zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} f(s_1,z_1)dz_1 \pm f(s_2,z_2)dz_2 = 0, \\ \varphi(s_1,z_1)dz_1 \pm \varphi(s_2,z_2)dz_2 = 0 \end{cases}$$

befriedigen.

*) Vergl. NÖTHER, Math. Annalen, Bd. 17, S. 265.

Im Bande 100 des Journals für Mathematik*) habe ich gezeigt, dass [164 die Grössenpaare (s_1, z_1), (s_2, z_2), welche die Gleichung (3.) befriedigen, alsdann eine Involution der RIEMANNschen Fläche (1.) bilden und ausserdem einer gewissen daselbst mit (H.) bezeichneten wohl bestimmten algebraischen Gleichung genügen müssen**).

Für den Fall, dass zwischen den Periodicitätsmoduln πi und a_μ, welche zu der RIEMANNschen Fläche (1.) gehören, nicht Relationen mit ganzzahligen Coefficienten stattfinden, sind daselbst die Folgerungen hieraus gezogen worden.

Dasselbe soll hier noch für den Fall geschehen, dass derartige Relationen zugelassen werden.

Es werde unter der in den vorhergehenden Nummern vorausgesetzten Involution diejenige verstanden, welche die Lösungen der Gleichung (3.) bilden, so giebt es nach voriger Nummer die eindeutig umkehrbare rationale Substitution

$$\left\{\begin{aligned} z &= R(t,u), \\ s &= S(t,u) \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

von der Beschaffenheit, dass wenn

$$z_1 = R(t,u), \quad s_1 = S(t,u), \tag{6.}$$

alsdann

$$z_2 = R(-t,-u), \quad s_2 = S(-t,-u). \tag{6a.}$$

Wenden wir die Substitution (5.) auf die Gleichung (2.) an, so erhalten wir

$$\frac{d^2y}{du^2} + G_1(t,u)\frac{dy}{du} + H_1(t,u)y = 0, \tag{2a.}$$

wo G_1, H_1 rationale Functionen der Variablen t, u bedeuten, welche eine Stelle in der RIEMANNschen Fläche

$$\Phi(t,u) = 0 \tag{1a.}$$

bezeichnen.

*) S. 189[1]).

**) Ebenda S. 195[2]).

[1]) Abh. XLIX, S. 427 ff. dieses Bandes. Sch.

[2]) S. 434 dieses Bandes. Sch.

Setzen wir

$$(7.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{du} f(s,z) = f_1(t,u), \\ \dfrac{dz}{du} \varphi(s,z) = \varphi_1(t,u), \end{cases}$$

so bilden $f_1(t,u)$, $\varphi_1(t,u)$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung

165] (2b.) $$\frac{d^2w}{du^2} + G_2(t,u)\frac{dw}{du} + H_2(t,u)w = 0,$$

welche aus (2a.) durch die Substitution

$$(8.)\qquad w = y\frac{dz}{du}$$

hervorgeht, wobei $\frac{dz}{du}$ die sich aus den Gleichungen (5.) ergebende rationale Function von t, u bedeutet.

Die Gleichungen (3.) und (4.) nehmen die Gestalt an

$$(3a.)\qquad f_1(t_1,u_1)\varphi_1(t_2,u_2) - f_1(t_2,u_2)\varphi_1(t_1,u_1) = 0,$$

$$(4a.)\qquad \begin{cases} f_1(t_1,u_1)du_1 \pm f_1(t_2,u_2)du_2 = 0, \\ \varphi_1(t_1,u_1)du_1 \pm \varphi_1(t_2,u_2)du_2 = 0. \end{cases}$$

Es soll der Voraussetzung gemäss für die Lösungen von (3a.) sein

$$(9.)\qquad t_2 = -t_1, \quad u_2 = -u_1,$$

und es sollen dadurch gleichzeitig die Gleichungen (4a.) erfüllt werden.

Die erste Forderung enthält den Satz:

I. Wenn die Lösungen der Gleichungen (3.) zu gleicher Zeit die Gleichungen (4.) befriedigen sollen, so muss es eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution (5.) geben von der Beschaffenheit, dass t^2, u^2 eindeutige Functionen des Quotienten ζ eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (2b.) oder (2.) werden.

Wir setzen nunmehr voraus, dass die erste Forderung erfüllt sei, alsdann ergiebt sich aus meiner oben erwähnten Arbeit*), wenn wir setzen

*) Bd. 100 des Math. Journals, S. 192[1]).

[1]) S. 431 dieses Bandes. Sch.

$$(10.)\qquad \begin{cases} P(t,u) = -\dfrac{3dG_2(t,u)}{du} + 9H_2(t,u) - 2G_2(t,u)^2, \\ \Delta(t,u) = e^{-\int G_2(t,u)\,du}, \end{cases}$$

als eine Consequenz der zweiten Forderung, dass die Werthenpaare $(t_1, u_1), (t_2, u_2)$, welche der Gleichung (3a.) genügen, auch die Gleichungen

$$(11.)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{\Delta(t_2,u_2)}\,du_2 - \sqrt[3]{\Delta(t_1,u_1)}\,du_1 = 0, \\ \sqrt{P(t_2,u_2)}\,du_2 - \sqrt{P(t_1,u_1)}\,du_1 = 0 \end{cases}$$

befriedigen.

Aus meiner Arbeit*) folgt, dass das Statthaben der Gleichungen (11.) auch die genügende Bedingung dafür ist, dass die Werthenpaare, welche [166 die Gleichung (3.) befriedigen, auch die Gleichungen (4.) erfüllen.

Aus (9.) und (11.) ergeben sich aber die Gleichungen

$$(11a.)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{\Delta(-t_1,-u_1)} + \sqrt[3]{\Delta(t_1,u_1)} = 0 \\ \sqrt{P(-t_1,-u_1)} + \sqrt{P(t_1,u_1)} = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten also folgendes Resultat:

II. Wenn es eine Substitution von der in Satz I. angegebenen Beschaffenheit giebt, und wenn zu gleicher Zeit die Gleichungen (11a.) erfüllt sind, so werden die Werthenpaare $(s_1, z_1), (s_2, z_2)$, welche die Gleichung (3.) erfüllen, auch stets die Gleichungen (4.) befriedigen.

Die Sätze I. und II. bestätigen, dass in dem allgemeinen Falle dasselbe Resultat gilt, welches ich in der oben erwähnten Arbeit**) für den Fall gegeben habe, dass die RIEMANNsche Fläche in eine zweiblättrige transformirbar ist. Es ist nämlich daselbst der Umstand, dass die transformirte Fläche eine zweiblättrige ist, unwesentlich. Das Wesentliche aber besteht darin, dass, wenn daselbst $\sqrt{S(u)} = t$ gesetzt wird, nach den Gleichungen (M.) und (M'.)***) t^2 und u^2 eindeutige Functionen von ζ werden,

*) Bd. 100 des Math. Journals, S. 198–199 [1]).

**) Ebenda S. 199–200 [2]).

***) Ebenda S. 196 [3]).

1) S. 437, 438 dieses Bandes. Sch.

2) S. 439 dieses Bandes. Sch.

3) S. 435 dieses Bandes. Sch.

und dass die Gleichungen (E'.), (F'.) oder ($E^{(2)}$.), ($F^{(2)}$.)*) befriedigt werden, welche Gleichungen mit den Gleichungen (11a.) übereinstimmen.

*) Bd. 100 des Math. Journals, S. 196 [1]).

[1]) S. 435 dieses Bandes. Sch.

ANMERKUNG.

Änderung gegen das Original.

S. 461, Zeile 2 v. u. wurde t eingefügt. SCH.

LII.

BEMERKUNGEN ZU EINER NOTE DES HERRN HURWITZ, ENTHALTEN IN No. 6 JAHRG. 1887, S. 104 sqq. DER NACHRICHTEN.

(Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, No. 11, 1887, S. 345—347, Sitzung am 21. Mai.)

Herr F. KLEIN hat der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eine [345 Arbeit des Herrn HURWITZ über algebraische Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, überreicht, welche in No. 6 der Nachrichten (20. April 1887, p. 85 sqq.) abgedruckt worden ist. Dieser Arbeit ist ein Nachtrag angefügt, mit welchem ein Angriff auf mich beabsichtigt ist. Indem Herr HURWITZ einen an mich adressirten Brief zum Abdruck bringt, fordert er das Urtheil des Lesers heraus, ob ich Herrn HURWITZS Verdienste durch mein Citat in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie, 24. Februar 1887, p. 162[1]) genügend gewürdigt habe.

Wäre Herr HURWITZ hierbei stehen geblieben, so hätte ich um so weniger Veranlassung, von meiner Gewohnheit, derartige Angriffe mit Stillschweigen zu übergehen, abzuweichen, als ich ganz und gar mit Herrn HURWITZ einverstanden bin, das Urtheil über diese Frage dem Forum der vorurtheilslosen Sachverständigen zu überlassen.

Aber Herr HURWITZ hat ein Weiteres gethan, das nicht mit Stillschweigen übergangen werden darf. Er hat einige Worte aus einem auf den genannten Brief von meiner Seite erfolgten Antwortschreiben herausgegriffen und die-

---

1) S. 457 dieses Bandes. Sch.

selben an der oben genannten Stelle abdrucken lassen. Wenn es nun die gute Sitte verbietet, den Brief eines Anderen ohne Erlaubniss des Briefschreibers zu veröffentlichen, so gestattet es die gute Sitte noch weniger, 346] einige Worte eines solchen Briefes — wie man sie gerade brauchen zu können glaubt — ohne Erlaubniss der Öffentlichkeit zu übergeben.

Ich bin daher genöthigt, mein erwähntes an Herrn HURWITZ gerichtetes Antwortschreiben hier vollständig zum Abdruck zu bringen. Dasselbe lautet wie folgt:

Berlin, 26. Januar 1887.

»Ihr geschätztes Schreiben fand ich am Anfange dieses Monats vor, als ich von einer in Familienangelegenheiten unternommenen Reise zurückkehrte. Eine grosse Last von Geschäften und andere Umstände trauriger Natur haben mich indessen bis jetzt verhindert mich mit dem Gegenstande zu befassen. Entschuldigen Sie daher, dass ich mich heute damit begnüge, Ihnen meinen Dank für Ihre freundliche Mittheilung auszusprechen. Demselben füge ich aber noch eine Bitte hinzu. Ich kenne bis jetzt die von Ihnen in Ihrem Briefe angeführten Untersuchungen aus den Sitzungsberichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften nicht, habe auch einen Abzug derselben von Ihnen nicht erhalten. Meine Bitte geht nun dahin, Sie möchten, falls Sie noch Abzüge besitzen, mir einen derselben gütigst zusenden. Mit freundlichem Gruss

Ihr ergebener etc.«

Hieran gestatte ich mir noch eine Bemerkung zu knüpfen. Das Zartgefühl des Herrn HURWITZ in Hinsicht der Würdigung seiner Verdienste liesse erwarten, dass derselbe auf das Citiren anderer Autoren die peinlichste Sorgfalt verwendete. Es würde mich zu weit führen hier in eine Untersuchung der Frage einzutreten, in wie fern Herr HURWITZ dieser Erwartung bisher gerecht geworden ist. Es genüge daher, dass ich ein Citat desselben beleuchte, welches sich in eben derselben Arbeit des Herrn HURWITZ vom 20. April 1887, p. 92 der Nachrichten befindet.

In einer Note vom 22. Juli 1886 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie p. 797[1]) wende ich auf die Transformation der ABELschen Integrale

[1]) Abh. XLVIII, S. 417 ff. dieses Bandes. Sch.

erster Gattung ein Verfahren an, welches ich bei einem analogen Probleme der Theorie der linearen Differentialgleichungen gegeben hatte (vergl. z. B. BORCHARDTS Journal, Bd. 66, p. 131—138[1]). Dieses Verfahren hat durch eine Arbeit des Herrn HAMBURGER (BORCHARDTS Journal, Bd. 76, p. 121), wie ich auch in meiner erwähnten Note vom 22. Juli 1886, Sitzungsberichte, p. 799[2]) citirt, eine elegante Vereinfachung erfahren. Herr HURWITZ bedient sich nun p. 92 l. c. ebenfalls für die Transformation der ABELschen Integrale meines Verfahrens, citirt aber nur die Abhandlung des Herrn HAMBURGER.

Aus welchem Grunde? Nun wohl aus demselben Grunde, aus welchem [347 er in seiner in Leipzig im Jahre 1881 verfassten Inauguraldissertation »Grundlagen der Theorie der elliptischen Modulfunctionen« es zu erwähnen unterlassen hat, dass ich in meiner Arbeit über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale (BORCHARDTS Journal, Bd. 71, p. 91[3]), 12 August 1869) und später ausführlicher in einem Briefe an Herrn HERMITE (gedruckt in BORCHARDTS Journal, Bd. 83, p. 13, Jahrg. 1876[4])) einen Beitrag zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen geliefert hatte.

---

1) Abh. VI, Band I dieser Ausgabe, S. 170—178. Sch.
2) S. 420 dieses Bandes. Sch.
3) Abh. VIII, Band I dieser Ausgabe, S. 241 ff. Sch.
4) Abh. XXIV, S. 85 ff. dieses Bandes. Sch.

LIII.

ÜBER RELATIONEN ZWISCHEN DEN INTEGRALEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1887, LII, S. 1077—1094; vorgelegt am 15. December; ausgegeben am 22. December 1887.)

In der Absicht, im Folgenden einige Bemerkungen mitzutheilen, [1077 welche auf Relationen zwischen den Integralen einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen sich beziehen, will ich das Integral auf eine Weise definiren, welche von der gewöhnlichen abweicht. Ist eine Differentialgleichung zwischen $z, y, \frac{dy}{dz}$ gegeben, so bezeichne ich das System zusammengehöriger veränderlicher Werthe $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$, welches der Differentialgleichung genügt, als ein Integral derselben. Dieses Integral ist in seinem Verlaufe vollständig bestimmt, wenn für einen bestimmten Werth

$$z = \alpha, \quad y = \beta, \quad \frac{dy}{dz} = \gamma$$

festgesetzt werden, oder, wie wir kurz sagen wollen, wenn seine Anfangswerthe (α, β, γ) gegeben werden.

In gleicher Weise wollen wir, wenn ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy_k}{dz} = f_k(z, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, das System der zusammengehörigen veränderlichen Werthe

$$\left(z, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dz}, \frac{dy_2}{dz}, \ldots, \frac{dz_n}{dz}\right),$$

welches den Differentialgleichungen genügt, ein Integral derselben nennen. Dasselbe ist durch ein vorgeschriebenes System $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ von Werthen

$$z = \alpha, \quad y_k = \beta_k, \quad \frac{dy_k}{dz} = \gamma_k,$$

oder kurz ausgedrückt, durch seinen Anfangswerth in seinem Verlaufe bestimmt.

Die Zweckmässigkeit dieser Definition wird durch den Gebrauch, welchen wir von derselben im Folgenden machen, hervortreten. Es ist jedoch schon ohne Weiteres ersichtlich, dass diese Definition deswegen der gewöhnlichen 1078] vorzuziehen ist, weil sie die Veränderlichen, welche durch die Differentialgleichung mit einander in Verbindung gesetzt werden, nicht vor einander bevorzugt. In der That kann man auch aus einem allgemeinen Satze des Herrn Poincaré*) die Folgerung ziehen, dass die abhängigen Veränderlichen und die unabhängige Veränderliche als eindeutige Functionen einer Hülfsveränderlichen darstellbar sind.

Dieses zeigt aber wieder die Nothwendigkeit, den Veränderlichen, abhängigen wie unabhängigen, in der Definition des Integrals eine gleichwerthige Stelle anzuweisen.

Die folgenden Bemerkungen haben besonders den Zweck, die in meiner Notiz**) eingeleiteten Untersuchungen über die Frage, wie die Anfangswerthe eines Integrals nichtlinearer Differentialgleichungen auf die Werthbestimmung desselben an jeder beliebigen Stelle influiren, fortzusetzen; und zwar dadurch, dass Beziehungen aufgesucht werden zwischen einem oder mehreren festen Integralen und einem oder mehreren mit willkürlichen Anfangswerthen behafteten. Die Art, wie in diese Beziehungen die Anfangswerthe eintreten, ist für die Beschaffenheit des gesuchten Einflusses entscheidend. Im Folgenden hoffen wir, zu der eben bezeichneten Frage einen kleinen Beitrag zu liefern, indem wir uns vorbehalten, an anderer Stelle in eine eingehendere Untersuchung des Problems einzutreten.

*) Bulletin de la Société mathématique de France, t. XI, 1883, pg. 112.

**) Sitzungsberichte d. Berl. Akad., 1884, S. 699[1]).

[1]) Abh. XLIII, S. 355 ff. dieses Bandes. Sch.

Es sei mir gestattet, an meine oben erwähnte Notiz*) eine Bemerkung anzuschliessen. Diese Notiz, welche vorwiegend die Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, behandelt, hat Herrn POINCARÉ zu einer schönen Untersuchung über die Differentialgleichungen der genannten Art Veranlassung gegeben, welche ausführlich in den Acta Mathematica**) veröffentlicht worden ist. Wir wollen nun bemerken, dass die Untersuchung der Differentialgleichungen höherer als der ersten Ordnung oder eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte besitzen, noch vollständig unberührt geblieben ist. Denn um nur einen Punkt hervorzuheben, so ist die Schlussweise, welche Herr POINCARÉ***) für Differentialgleichungen erster Ordnung anwendet, nicht ohne Weiteres auf Differentialgleichungen derselben Art und höherer Ordnung anwendbar.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung [1079

$$(\alpha.) \qquad y\frac{d^2y}{dz^2} - \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 0.$$

Dieselbe wird befriedigt durch

$$(\beta.) \qquad y = y_0 e^{\frac{y_0'}{y_0}(z-z_0)},$$

wenn y_0, y_0' die Werthe von y, $\frac{dy}{dz} = y'$ in z_0 bezeichnen. Für $z = z_1$ ist

$$(\gamma.) \qquad y_1 = y_0 e^{\frac{y_0'}{y_0}(z_1-z_0)}, \qquad y_1' = y_0' e^{\frac{y_0'}{y_0}(z_1-z_0)},$$

und umgekehrt,

$$(\delta.) \qquad y_0 = y_1 e^{\frac{y_1'}{y_1}(z_0-z_1)}, \qquad y_0' = y_1' e^{\frac{y_1'}{y_1}(z_0-z_1)}.$$

Der Grund hiervon ist der, dass Mannigfaltigkeiten complexer Variablen höherer als erster Ordnung gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sein

*) Sitzungsberichte d. Berl. Akad., 1884, S. 699 [1]).

**) T. VII, S. 1.

***) A. a. O., S. 12.

[1]) Abh. XLIII, S. 355 ff. dieses Bandes. Sch.

können, ohne gegenseitig rational ausdrückbar zu sein, wie auch schon Herr PICARD*) bemerkt hat.

Besondere Schwierigkeiten verursachen auch bei den Differentialgleichungen höherer Ordnung diejenigen mit den Anfangswerthen stetig verschiebbaren singulären Punkte, in welchen die Integrale sich zwar nicht verzweigen, aber unbestimmt werden. Allein solche singuläre Punkte dürfen nicht ausgeschlossen werden, wenn nur die Verzweigungspunkte fest sein sollen.

Dass es übrigens Differentialgleichungen höherer Ordnung giebt, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte besitzen, und deren Integration höhere Transcendenten liefert, folgt schon aus dem Umstande, dass diejenigen Differentialgleichungen, welche durch eindeutige Functionen vollständig integrirbar sind, zu der Klasse derer gehören, deren Integrale mit den Anfangswerthen nicht verschiebbare Verzweigungspunkte haben. Dass es aber Differentialgleichungen höherer Ordnung giebt, welche durch eindeutige Functionen höherer Natur vollständig integrirbar sind, dafür hat schon Herr PICARD**) das Beispiel der Differentialgleichung dritter Ordnung angeführt:

$$(\varepsilon.) \qquad C^2[CC^{(3)} + 3C'C^{(2)}] = (C^{(2)})^2[16C^2C^{(3)} + 1],$$

1080] deren vollständiges Integral JACOBI***) vermittelst der von der unabhängigen Veränderlichen $\log q$ eindeutig abhängenden Grösse $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ gegeben hat.

1.

Wir nehmen zu unserem Ausgangspunkte eine Differentialgleichung der Form

$$(A.) \qquad F(z)\,dz + F(y)\,dy = 0,$$

wo $F(z)$ eine algebraische Function von z bezeichnet.

In dem Fall, dass

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}},$$

*) Comptes rendus de l'Acad. de Paris, Janvier 1887, p. 42.

**) A. a. O.

***) CRELLES Journal, Bd. 36, S. 102–103[1]).

[1]) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 190. Sch.

Ist andererseits $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$F_1(z)\,dz + F_1(y)\,dy = 0, \tag{A'.}$$

mit denselben Anfangswerthen wie das vorige, so ergiebt jedes Werthepaar (z_1, y_1), welches aus den Gleichungen (3.) und (4.) bestimmt wird, zusammen mit dem wie oben erhaltenen Werthe von $\frac{dy_1}{dz_1}$ ein neues Integral der Gleichung (A'.), welchem gleichfalls dieselben Anfangswerthe, wie im vorigen Falle, zukommen.

Wir können diese Schlussfolgerung kurz in dem Satze zusammenfassen:

Ist $F(z)$ der Differentialquotient eines ABELschen Integrals erster Gattung vom Range $p = 2$, so sind die Elemente eines mit beliebig vorgeschriebenen Anfangswerthen behafteten Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Differentialgleichung (A.) algebraische Functionen der Elemente eines einzelnen durch seine Anfangswerthe bestimmten Integrals derselben Differentialgleichung.

Dieselben algebraischen Functionen bestimmen die Elemente eines beliebigen Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Gleichung (A'.) durch diejenigen eines bestimmten Integrals $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ derselben Gleichung, wenn $F_1(z)$ ein zu derselben RIEMANNschen Fläche gehöriger von $F(z)$ linearunabhängiger Differentialquotient eines Integrals erster Gattung ist.

1082] Dieser Satz erscheint als die natürliche Ausdehnung desjenigen, welchen EULER für den Fall, dass $F(z)$ den reciproken Werth der Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function vierten Grades darstellt, ausgesprochen hat. Und dieser Umstand rechtfertigt schon die von uns oben gegebene Definition des Integrals einer Differentialgleichung.

2.

Wir wollen nunmehr ein analoges Theorem für einen Fall entwickeln, für welchen die Differentialgleichung der allgemeineren Form

$$f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0, \tag{B.}$$

wo f eine rationale Function der Argumente bedeutet, angehört.

Es seien ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei eindeutige vierfach periodische Functionen der unabhängigen Variablen u_1, u_2, welche für endliche Werthe dieser Variablen den Charakter rationaler Functionen besitzen, und welche so beschaffen sind, dass unter den Periodensystemen je einer derselben sich alle Periodensysteme der beiden anderen befinden, so folgt aus einem von Herrn WEIERSTRASS*) gegebenen Satze, dass ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch eine irreductible algebraische Gleichung mit einander verbunden sind.

Da die Ableitungen der Functionen ξ wie diese beschaffene Functionen sind und dieselben Perioden besitzen, so folgt, dass zwischen jeder Ableitung einer der Functionen ξ und zweien dieser Functionen selbst je eine irreductible algebraische Gleichung besteht. Demnach hat man

$$(1.) \qquad \begin{cases} d\xi_1 = A_{11}\,du_1 + A_{12}\,du_2, \\ d\xi_2 = A_{21}\,du_1 + A_{22}\,du_2, \end{cases}$$

wo A_{ik} algebraische Functionen von ξ_1, ξ_2 bedeuten. Durch Auflösung der Gleichungen (1.) möge sich

$$(2.) \qquad \begin{cases} du_1 = B_{11}\,d\xi_1 + B_{12}\,d\xi_2, \\ du_2 = B_{21}\,d\xi_1 + B_{22}\,d\xi_2 \end{cases}$$

ergeben. In diesen Gleichungen sind demnach B_{ik} algebraische Functionen von ξ_1, ξ_2.

Bedeuten c_1, c_2 willkürliche, von u_1, u_2 unabhängige Grössen, und setzen wir

$$(3.) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(u_1, u_2), & \xi_2 = \varphi_2(u_1, u_2), \\ \xi_1' = \varphi_1(u_1 + c_1, u_2 + c_2), & \xi_2' = \varphi_2(u_1 + c_1, u_2 + c_2), \end{cases}$$

so erhält man die partiellen Ableitungen von ξ_1', ξ_2' nach den Variablen [1083 u_1, u_2, wenn man in die algebraischen Functionen von ξ_1, ξ_2, welche die entsprechenden partiellen Ableitungen von ξ_1, ξ_2 bestimmen, ξ_1', ξ_2' an die Stelle von ξ_1, ξ_2 setzt. Nach dieser Substitution möge B_{ki} mit B_{ki}' bezeichnet werden; dann ist

$$(2a.) \qquad \begin{cases} du_1 = B_{11}'\,d\xi_1' + B_{12}'\,d\xi_2', \\ du_2 = B_{21}'\,d\xi_1' + B_{22}'\,d\xi_2'. \end{cases}$$

*) BORCHARDTS Journal, Bd. 89, S. 7 [1]).

[1]) Weierstrass' Werke, Bd. II (1895), S. 132. Sch.

Aus den Gleichungen (2.) und (2a.) folgt

$$(4.)\qquad \begin{cases} B'_{11}\,d\xi'_1 + B'_{12}\,d\xi'_2 = B_{11}\,d\xi_1 + B_{12}\,d\xi_2, \\ B'_{21}\,d\xi'_1 + B'_{22}\,d\xi'_2 = B_{21}\,d\xi_1 + B_{22}\,d\xi_2. \end{cases}$$

Andererseits ergiebt sich aus demselben oben erwähnten Theoreme des Herrn WEIERSTRASS, dass ξ'_1, ξ'_2 algebraisch mit ξ_1, ξ_2 verbunden sind.

Wir wollen nunmehr die Bezeichnungen dahin abändern, dass wir

$$(5.)\qquad \begin{cases} \xi_1 = z, & \xi_2 = y, \\ \xi'_1 = z_1, & \xi'_2 = y_1 \end{cases}$$

und gleichzeitig

$$(6.)\qquad \begin{cases} B_{11} = F_{11}(z, y), & B_{12} = F_{12}(z, y), \\ B_{21} = F_{21}(z, y), & B_{22} = F_{22}(z, y) \end{cases}$$

setzen. Die Gleichungen (4.) erhalten alsdann die folgende Form:

$$(7.)\qquad \begin{cases} F_{11}(z_1, y_1)\,dz_1 + F_{12}(z_1, y_1)\,dy_1 = F_{11}(z, y)\,dz + F_{12}(z, y)\,dy, \\ F_{21}(z_1, y_1)\,dz_1 + F_{22}(z_1, y_1)\,dy_1 = F_{21}(z, y)\,dz + F_{22}(z, y)\,dy. \end{cases}$$

Zwischen z, y, z_1, y_1 finden zwei algebraische Gleichungen statt. In den Coefficienten derselben treten die Werthe $\varphi_1(c_1, c_2), \varphi_2(c_1, c_2)$ algebraisch auf. Setzen wir also

$$(8.)\qquad \gamma = \varphi_1(c_1, c_2), \quad \gamma_1 = \varphi_2(c_1, c_2),$$

so können wir die obenerwähnten algebraischen Gleichungen in die Form setzen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \gamma = G(z, y, z_1, y_1), \\ \gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (7.) und (9.) können wir eine Schlussfolgerung ziehen, welche der in der vorigen Nummer an den Gleichungen (A.) und (A'.) und an den Gleichungen (3.) und (4.) daselbst gemachten analog ist, und wir erhalten dadurch folgenden Satz:

Ist $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein durch seine Anfangswerthe $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0)$ ein für alle Mal bestimmtes Integral der Gleichung

$$(B'.)\qquad F_{11}(z, y)\,dz + F_{12}(z, y)\,dy = 0,$$

so liefern die Gleichungen (9.) unter Fixirung der Grössen [1084 γ, γ_1 die Elemente eines beliebigen andern Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ derselben Gleichung als algebraische Functionen der Elemente $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$.

Sind (α, β, δ) die Anfangswerthe des zu bestimmenden Integrals, so sind γ, γ_1 aus den Gleichungen

$$\text{(10.)} \qquad \begin{cases} \gamma = G(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta), \\ \gamma_1 = H(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta) \end{cases}$$

mit der Maassgabe zu folgern, dass der durch Differentiation aus (9.) sich ergebende Werth von $\frac{dy_1}{dz_1}$ für

$$z = \alpha_0, \quad y = \beta_0, \quad \frac{dy}{dz} = \delta_0, \quad z_1 = \alpha, \quad y_1 = \beta$$

mit δ coincidirt.

Bedeutet andererseits $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein durch seine Anfangswerthe $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0)$ ein für alle Mal bestimmtes Integral der Gleichung

$$\text{(B''.)} \qquad F_{21}(z, y)\, dz + F_{22}(z, y)\, dy = 0,$$

so liefern in analoger Weise die Gleichungen (9.) die Elemente eines beliebigen anderen mit vorgeschriebenen Anfangswerthen (α, β, δ) behafteten Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ als algebraische Functionen der Elemente von $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$.

3.

Wir wollen die Gleichung (B.) in die Form setzen

$$\text{(C.)} \qquad \frac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y),$$

wo $\varphi(z, y)$ eine algebraische Function von z, y bedeuten soll.

Es seien

$$\text{(D.)} \qquad \begin{cases} \gamma = G(z, y, z_1, y_1), \\ \gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1) \end{cases}$$

analytische Functionen der vier Variablen z, y, z_1, y_1. Wir wollen diese Functionen folgendermaassen bestimmen. Wenn $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ irgend ein Integral der Gleichung (C.) darstellt, und wir bestimmen aus den Gleichungen (D.) [1085

unter der Voraussetzung, dass γ, γ_1 willkürliche, aber unveränderliche Werthe annehmen, $z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}$, so sollen diese Grössen ebenfalls die Elemente eines Integrals $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ der Gleichung (C.) liefern.

Differentiiren wir die Gleichungen (D.) unter der Voraussetzung, dass γ, γ_1 feste Werthe annehmen, so folgt

$$(1.) \qquad \begin{cases} \Delta dz_1 = -C dz - D dy, \\ \Delta dy_1 = \quad A dz + B dy, \end{cases}$$

wo

$$(2.) \qquad \begin{cases} A = \frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z_1} - \frac{\partial\gamma}{\partial z_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad B = \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z_1} - \frac{\partial\gamma}{\partial z_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}, \\ C = \frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y_1} - \frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad D = \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y_1} - \frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}, \\ \Delta = \frac{\partial\gamma}{\partial z_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y_1} - \frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z_1}. \end{cases}$$

Dividiren wir die Gleichungen (1.) durch einander und setzen aus Gleichung (C.)

$$\frac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y),$$

so soll unserer Forderung gemäss

$$(3.) \qquad \frac{dy_1}{dz_1} = \mu_1 = \varphi(z_1, y_1)$$

werden. Wir erhalten demnach

$$(E.) \qquad A + B\mu + C\mu_1 + D\mu\mu_1 = 0.$$

Ist $\mu = \varphi(z, y)$ eine bekannte Function von z, y, also auch $\mu_1 = \varphi(z_1, y_1)$ eine bekannte Function von z_1, y_1, so ist die Gleichung (E.) in Bezug auf die Veränderlichen z, y, z_1, y_1 identisch erfüllt; sie stellt daher eine partielle Differentialgleichung dar, welcher γ, γ_1 als Functionen der unabhängigen Veränderlichen z, y, z_1, y_1 genügen müssen.

Wenn aber γ, γ_1 dieser partiellen Differentialgleichung genügen, so folgt aus den Gleichungen (1.):

$$(F.) \qquad \Delta(C + D\mu)(dy_1 - \mu_1 dz_1) + (AD - BC)(dy - \mu dz) = 0.$$

Aus der Gleichung (F.) ergiebt sich:

Ist $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichung (C.), so ist $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ [1086 ein Integral derselben Gleichung, wenn z_1, y_1 mit z, y durch die Gleichungen (D.) verbunden sind.

4.

Aus der Gleichung (E.) ergiebt sich:

$$\mu_1 = -\frac{A + B\mu}{C + D\mu}. \tag{1.}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung von z, y unabhängig ist, so muss dieses auch für die rechte Seite gelten. Hieraus folgt, wenn wir

$$AD - BC = \mathrm{E}, \tag{2.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\alpha_0 &= C\frac{\partial A}{\partial z} - A\frac{\partial C}{\partial z}, \\ \mathrm{E}\alpha_1 &= C\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial C}{\partial z} + D\frac{\partial A}{\partial z} - A\frac{\partial D}{\partial z}, \\ \mathrm{E}\alpha_2 &= D\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial D}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

setzen,

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = \alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2. \tag{G.}$$

Bedeuten $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ diejenigen Grössen, welche aus $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ bez. hervorgehen, wenn in denselben die Differentiationen von A, B, C, D nach z durch solche nach y ersetzt werden, so ergiebt sich ebenso

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2. \tag{G$_1$.}$$

Differentiiren wir die Gleichung (G.) nach y und die Gleichung (G$_1$.) nach z, so erhalten wir durch Vergleichung der beiden Werthe von $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} - \frac{\partial \beta_0}{\partial z} + \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + 2(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2)\right]\mu \\ + \left[\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} - \frac{\partial \beta_2}{\partial z} + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\right]\mu^2 = 0. \end{aligned} \tag{H.}$$

Wenn γ, γ_1 der Gleichung (E.) Genüge leisten, so können zwei [1087 Fälle eintreten.

Entweder ist nur eine Wurzel der Gleichung (H.) von z_1, y_1 unabhängig. Dann ist für diese Wurzel μ die Gleichung (F.) erfüllt.

Oder es sind beide Wurzeln der Gleichung (H.) von z_1, y_1 unabhängig. Wir bezeichnen alsdann die zweite Wurzel mit ν, und mit ν_1 diejenige Grösse, welche aus ν hervorgeht, wenn z, y bez. mit z_1, y_1 vertauscht wird. Wenn γ und γ_1 alsdann auch die Gleichung

$$(E_1.) \qquad A + B\nu + C\nu_1 + D\nu\nu_1 = 0$$

erfüllen, so findet ausser der Gleichung (F.) noch die Gleichung

$$(F_1.) \qquad \Delta(C + D\nu)(dy_1 - \nu_1 dz_1) + E(dy - \nu dz) = 0$$

statt.

Sei im zweiten Falle $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichung

$$(C_1.) \qquad \frac{dy}{dz} = \nu = \varphi_1(z, y),$$

so folgt aus der Gleichung (F_1.), dass $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ ebenfalls ein Integral der Gleichung (C_1.) ist, wenn z_1, y_1 mit z, y durch die Gleichungen (D.) verbunden sind.

Einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = \psi(z, y),$$

in welcher ψ von φ und φ_1 verschieden ist, kann dieselbe Eigenschaft nicht zukommen.

Der zweite Fall ist erfüllt in den in No. 1 und 2 gegebenen Beispielen. In No. 1 sind die Gleichungen (3.) und (4.) an Stelle der Gleichungen (D.), und die Gleichungen (A.), (A'.) bez. an die Stelle von (C.) und (C_1.) zu setzen; in No. 2 treten die Gleichungen (9.) an Stelle von (D.), die Gleichungen (7.) an Stelle von (F.), (F_1.); endlich die Gleichungen (B'.), (B''.) an Stelle von (C.) und (C_1.).

Die Gleichungen (D.) stellen in diesen Beispielen algebraische Relationen zwischen z, y, z_1, y_1 dar.

5.

Ist $z_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ ein Werthepaar, welches den Gleichungen (D.) gemäss bei festen Werthen γ, γ_1 einem Werthepaare $z = a$, $y = b$ entspricht, und bezeichnet $\mu = \varepsilon$ einen bestimmten Werth der algebraischen Function μ [1088 von z, y für $z = a$, $y = b$, so liefert die Gleichung (E.) für die algebraische Function μ_1 von z_1, y_1 einen bestimmten Werth $\mu_1 = \varepsilon_1$.

Wenn z, y, von a, b bez. ausgehend, auf irgend welchen Wegen wieder nach a, b zurückkehren, und zu gleicher Zeit der Werth $\mu = \varepsilon$ in einen Werth $\mu = \varepsilon'$ der algebraischen Function μ von z, y für $z = a$, $y = b$ übergeführt wird, so wird im Allgmeinen auch das Werthsystem (z_1, y_1), wie es sich aus den Gleichungen (D.) ergiebt, von den Ausgangswerthen $z_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ verschiedene Werthe $z_1 = a_1'$, $y_1 = b_1'$ annehmen. Der nach Gleichung (E.) zugehörige Werth $\mu_1 = \varepsilon_1'$ wird im Allgemeinen von dem Ausgangswerthe $\mu_1 = \varepsilon_1$ verschieden sein, kann aber auch mit demselben übereinstimmen.

Diese Thatsache lässt sich an dem Beispiele in No. 1 verificiren. Sei daselbst z. B.

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}},$$

wo $R(z)$ eine ganze rationale Function sechsten Grades bedeutet, so ist

$$\mu = \frac{\sqrt{R(y)}}{\sqrt{R(z)}}$$

von den Vorzeichen von $\sqrt{R(z)}$ und $\sqrt{R(y)}$ abhängig. Die Gleichungen (3.) und (4.) daselbst, welche unsere Gleichungen (D.) vertreten, lassen sich mit Hülfe des ABELschen Theorems herleiten. Aus ihnen folgt, dass z_1, y_1 gleichermaassen von den Vorzeichen von $\sqrt{R(z)}$, $\sqrt{R(y)}$ abhängen.

Wenn es jedoch Wege V der Veränderlichen z, y giebt, welche alle die verschiedenen Werthe, deren die algebraische Function μ fähig ist, hervorbringen, und gleichzeitig die aus (D.) hervorgehenden Werthsysteme (z_1, y_1) in sich selbst zurückführen, so können immer noch γ, γ_1 auf diesen verschiedenen Wegen verschiedene Werthe erhalten.

Man könnte nun aber an die Functionen γ, γ_1 die specielle Forderung stellen, dass es nicht nur Wege V der eben genannten Art gebe, sondern

dass auf diesen Wegen auch γ, γ_1 ihre Werthe reproduciren. Ohne hier in die Untersuchung der Möglichkeit einer solchen Bestimmung einzutreten, wollen wir nur eine Consequenz für die algebraische Function μ von x, y hervorheben, welche jene Forderung nach sich zöge.

Bringen wir die algebraische Gleichung (C.), welcher μ Genüge leistet, in die Form

$$(\alpha.) \qquad \psi_0 \mu^n + \psi_1 \mu^{n-1} + \cdots + \psi_n = 0,$$

1089] wo die ψ ganze rationale Functionen von x und y bedeuten. Sei

$$\mu = \frac{\xi}{\eta},$$

so verwandelt sich die linke Seite derselben nach Multiplication mit η^n in eine binäre Form $f(\xi, \eta)$ n^{ten} Grades. Die Function μ_1 von x_1, y_1 genügt der Gleichung

$$(\beta.) \qquad \psi_0(x_1, y_1)\mu_1^n + \psi_1(x_1, y_1)\mu_1^{n-1} + \cdots + \psi_n(x_1, y_1) = 0.$$

Setzen wir

$$\mu_1 = \frac{\xi_1}{\eta_1},$$

so wird die linke Seite dieser Gleichung nach Multiplication mit η_1^n eine binäre Form $f_1(\xi_1, \eta_1)$. Bei der speciellen Forderung, die wir bezeichnet haben, muss nach Gleichung (E.) die Substitution

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} \xi_1 = -\lambda(A\eta + B\xi), \\ \eta_1 = \lambda(C\eta + D\xi) \end{cases}$$

ergeben:

$$(\delta.) \qquad f_1(\xi_1, \eta_1) = \Omega f(\xi, \eta),$$

wo Ω von ξ, η, ξ_1, η_1 unabhängig ist. Da nun nach der Voraussetzung zwischen x, y, x_1, y_1 nicht Relationen stattfinden sollen, welche von den willkürlichen Constanten γ, γ_1 frei sind, so ergäbe sich aus den Gleichungen $(\gamma.), (\delta.)$, dass, um der oben angegebenen speciellen Forderung zu genügen, die absoluten Invarianten der Form $f(\xi, \eta)$ von x, y unabhängig sein müssten.

6.

Es seien jetzt γ, γ_1 analytische Functionen der sechs Variablen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2:

$$\text{(J.)} \qquad \begin{cases} \gamma = G(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2), \\ \gamma_1 = H(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2). \end{cases}$$

Differentiiren wir diese Gleichungen unter der Voraussetzung, dass γ, γ_1 feste Werthe haben, so folgt

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} \Delta_1 dz_2 = -C_1 dz - D_1 dy - C_2 dz_1 - D_2 dy_1, \\ \Delta_1 dy_2 = \quad A_1 dz + B_1 dy + A_2 dz_1 + B_2 dy_1, \end{cases}$$

wo

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial z_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad B_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} - \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z_2}, \\ C_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z}, \qquad D_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y}, \\ \Delta_1 = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y_2}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial z_2} \end{cases} \qquad [1090$$

und A_2, B_2, C_2, D_2 aus diesen erhalten werden, wenn die Differentiationen nach z, y durch solche nach z_1, y_1 ersetzt werden.

Dividiren wir die Gleichungen (1.) durch einander und setzen, wie in No. 3,

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y), \\ \dfrac{dy_1}{dz_1} = \mu_1 = \varphi(z_1, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dz_2} = \mu_2 = \varphi(z_2, y_2), \end{cases}$$

so folgt

$$\mu_2 = -\frac{(A_1 + B_1\mu)\,dz + (A_2 + B_2\mu_1)\,dz_1}{(C_1 + D_1\mu)\,dz + (C_2 + D_2\mu_1)\,dz_1}.$$

Es mögen nun γ, γ_1 als Functionen der unabhängigen Veränderlichen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2 den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(K.)} \qquad \begin{cases} A_1 + B_1\mu + C_1\mu_2 + D_1\mu\mu_2 = 0, \\ A_2 + B_2\mu_1 + C_2\mu_2 + D_2\mu_1\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten.

Aus den Gleichungen (1.) und (K.) ergiebt sich dann die Identität

$$(L.)\quad \Delta_1(dy_2-\mu_2 dz_2)-(B_1+D_1\mu_2)(dy-\mu dz)-(B_2+D_2\mu_2)(dy_1-\mu_1 dz_1)=0.$$

Sind demnach $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$, $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ Integrale der Gleichung (C.), so ist auch $\left(z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}\right)$ ein Integral der Gleichung (C.), wenn $z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}$ mit den Elementen der beiden ersten Integrale durch die Gleichungen (J.) verbunden sind, in welchen γ, γ_1 feste Werthe erhalten.

1091] 7.

Zu einer anderen Kategorie von Relationen gelangen wir, wenn wir vier analytische Functionen $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ der Veränderlichen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2:

$$(M.)\qquad \gamma_k = G_k(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2) \qquad (k=0,1,2,3)$$

betrachten.

Differentiiren wir diese Gleichungen unter der Voraussetzung, dass die Grössen γ_k feste Werthe haben, so ergiebt sich

$$(1.)\qquad \begin{cases} Zdz_1 = E_1 dz + F_1 dy, & Zdz_2 = E_2 dz + F_2 dy, \\ Zdy_1 = G_1 dz + H_1 dy, & Zdy_2 = G_2 dz + H_2 dy, \end{cases}$$

wo Z, E_1, F_1 u. s. w., sich aus den ersten partiellen Ableitungen der Functionen G_k zusammensetzen.

Bestimmen wir die Functionen γ_k der unabhängigen Veränderlichen z, y, z_1, y_1, z_2, y_2 so, dass sie den partiellen Differentialgleichungen

$$(N.)\qquad \begin{cases} G_1 + H_1\mu - E_1\mu_1 - F_1\mu\mu_1 = 0, \\ G_2 + H_2\mu - E_2\mu_2 - F_2\mu\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten, so ergiebt sich aus (1.)

$$(O.)\qquad \begin{cases} Z(dy_1-\mu_1 dz_1) = (H_1-\mu_1 F_1)(dy-\mu dz), \\ Z(dy_2-\mu_2 dz_2) = (H_2-\mu_2 F_2)(dy-\mu dz). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Ist $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichung (C.) und sind

$$z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \quad z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}$$

mit den Elementen desselben durch die Gleichungen (M.) verbunden, so sind $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$, $\left(z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}\right)$ ebenfalls Integrale der Gleichung (C.), wenn die Functionen γ_k den partiellen Differentialgleichungen (N.) Genüge leisten.

Man erkennt, wie die Untersuchung fortzusetzen ist, um Relationen zwischen einer beliebigen Anzahl von Integralen der Differentialgleichung (C.) zu erlangen.

8.

Wir wollen zum Beschluss noch zeigen, wie die vorhergehenden Betrachtungen auf ein System von Differentialgleichungen auszudehnen sind, indem wir uns auf ein System von zwei Differentialgleichungen

(P.)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = \mu = \varphi(z, y, v), \\ \frac{dv}{dz} = \nu = \psi(z, y, v) \end{cases}$$ [1092

beschränken.

Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei analytische Functionen der Veränderlichen z, y, v, z_1, y_1, v_1:

(Q.)
$$\gamma_k = G_k(z, y, v, z_1, y_1, v_1), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

so ergiebt sich aus diesen Gleichungen, wenn sie unter Fixirung von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ differentiirt werden,

(1.)
$$\begin{cases} H dz_1 = P_1 dz + P_2 dy + P_3 dv, \\ H dy_1 = Q_1 dz + Q_2 dy + Q_3 dv, \\ H dv_1 = R_1 dz + R_2 dy + R_3 dv, \end{cases}$$

wo H, P_k, Q_k, R_k sich aus den ersten partiellen Ableitungen der Functionen G_k zusammensetzen.

Wir bestimmen die Functionen G_k der unabhängigen Veränderlichen z, y, v, z_1, y_1, v_1 so, dass sie den partiellen Differentialgleichungen

(R.)
$$\begin{cases} Q_1 + Q_2\mu + Q_3\nu - \mu_1(P_1 + P_2\mu + P_3\nu) = 0, \\ R_1 + R_2\mu + R_3\nu - \nu_1(P_1 + P_2\mu + P_3\nu) = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten, wenn wir

(2.)
$$\begin{cases} \mu_1 = \varphi(z_1, y_1, v_1), \\ \nu_1 = \psi(z_1, y_1, v_1) \end{cases}$$

setzen. Aus den Gleichungen (1.) und (R.) ergeben sich die Identitäten:

$$(S.)\quad \begin{cases} (P_1+P_2\mu+P_3\nu)\,H(dy_1-\mu_1 dz_1) = (\alpha_3-\nu\alpha_1)(dy-\mu dz)+(-\alpha_2+\mu\alpha_1)(dv-\nu dz), \\ (P_1+P_2\mu+P_3\nu)\,H(dv_1-\mu_1 dz_1) = (\beta_3-\nu\beta_1)(dy-\mu dz)+(-\beta_2+\mu\beta_1)(dv-\nu dz), \end{cases}$$

wo

$$\alpha_1 = P_2Q_3-P_3Q_2,\quad \alpha_2 = P_3Q_1-P_1Q_3,\quad \alpha_3 = P_1Q_2-P_2Q_1,$$

und wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bez. aus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hervorgehen, wenn Q_1, Q_2, Q_3 bez. durch R_1, R_2, R_3 ersetzt werden. Aus den Gleichungen (S.) ergiebt sich:

Ist $\left(z, y, v, \frac{dy}{dz}, \frac{dv}{dz}\right)$ ein Integral der Gleichungen (P.), so ist auch

1093] $\left(z_1, y_1, v_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \frac{dv_1}{dz_1}\right)$ ein Intgral derselben Gleichungen, wenn z_1, y_1, v_1, z, y, v durch die Gleichungen (Q.) verbunden sind, worin $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ feste Werthe erhalten; vorausgesetzt, dass G_1, G_2, G_3 den partiellen Differentialgleichungen (R.) Genüge leisten.

9.

Zu den Relationen voriger Nummer liefern die Differentialgleichungen

$$(P'.)\quad \begin{cases} \psi_1(z,\sigma)\,dz+\psi_1(y,\tau)\,dy+\psi_1(v,\chi)\,dv = 0, \\ \psi_2(z,\sigma)\,dz+\psi_2(y,\tau)\,dy+\psi_2(v,\chi)\,dv = 0 \end{cases}$$

ein einfaches Beispiel, wenn

$$(1.)\qquad F(\xi,\eta) = 0$$

eine algebraische Gleichung vom Range $p = 3$, und $\psi_1(\xi,\eta)$, $\psi_2(\xi,\eta)$ zwei linearunabhängige Differentialquotienten von den zugehörigen Integralen erster Gattung bedeuten.

Ist nämlich $\psi_3(\xi,\eta)$ ein dritter, von ψ_1, ψ_2 linearunabhängiger Differentialquotient eines Integrals erster Gattung, und bezeichnen wir mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ drei bestimmte, mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei willkürlich wählbare Stellen in der zu Gleichung (1.) gehörigen Riemannschen Fläche, so wird nach dem Abelschen Theorem das System der Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{(z,\sigma)} \psi_k(z,\sigma)\,dz+\int_{\varepsilon_2}^{(y,\sigma)} \psi_k(y,\tau)\,dy+\int_{\varepsilon_3}^{(v,\chi)} \psi_k(v,\chi)\,dv \\ \displaystyle = \int_{\gamma_1}^{(z_1,\sigma_1)} \psi_k(z_1,\sigma_1)\,dz_1+\int_{\gamma_2}^{(y_1,\tau_1)} \psi_k(y_1,\tau_1)\,dy_1+\int_{\gamma_3}^{(v_1,\chi_1)} \psi_k(v_1,\chi_1)\,dv_1 \quad (k=1,2,3) \end{cases}$$

durch drei algebraische Functionen z_1, y_1, v_1 von $z, y, v, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ befriedigt.

Bringen wir diese auf die Form:

$$(Q'.) \qquad \gamma_k = G_k(z, y, v, z_1, y_1, v_1), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

so ist für constante Werthe von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ identisch

$$(S'.) \qquad \psi_k(z_1, \sigma_1)\,dz_1 + \psi_k(y_1, \tau_1)\,dy_1 + \psi_k(v_1, \chi_1)\,dv_1 = \psi_k(z, \sigma)\,dz + \psi_k(y, \tau)\,dy + \psi_k(v, \chi)\,dv. \qquad (k = 1, 2)$$

Ist also $\left(z, y, v, \frac{dy}{dz}, \frac{dv}{dz}\right)$ ein Integral des Systems (P'.), so ist auch [1094 $\left(z_1, y_1, v_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \frac{dv_1}{dz_1}\right)$ ein Integral derselben Gleichungen, zu welchem $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ als Anfangswerthe gehören.

Selbstverständlich bestehen dieselben Relationen (Q'.) auch für zusammengehörige Integrale derjenigen Differentialgleichungen, welche aus (P'.) hervorgehen, wenn ψ_1, ψ_2 durch die Differentialquotienten eines anderen Paares von Integralen erster Gattung ersetzt werden.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 468, Zeile 14 unabhängige Veränderliche statt unabhängigen Veränderlichen,

„ „ , „ 4 v. u. Beschaffenheit statt Beantwortung,

„ 472, „ 11 v. u. ist statt bedeutet,

„ 478, „ 4 die statt diese,

„ 482, Gl. (O.) $H_1 - \mu_1 F_1$ statt $H_2 - \mu_1 F_1$ und $H_2 - \mu_2 F_2$ statt $H_2 - \mu_2 F_1$.

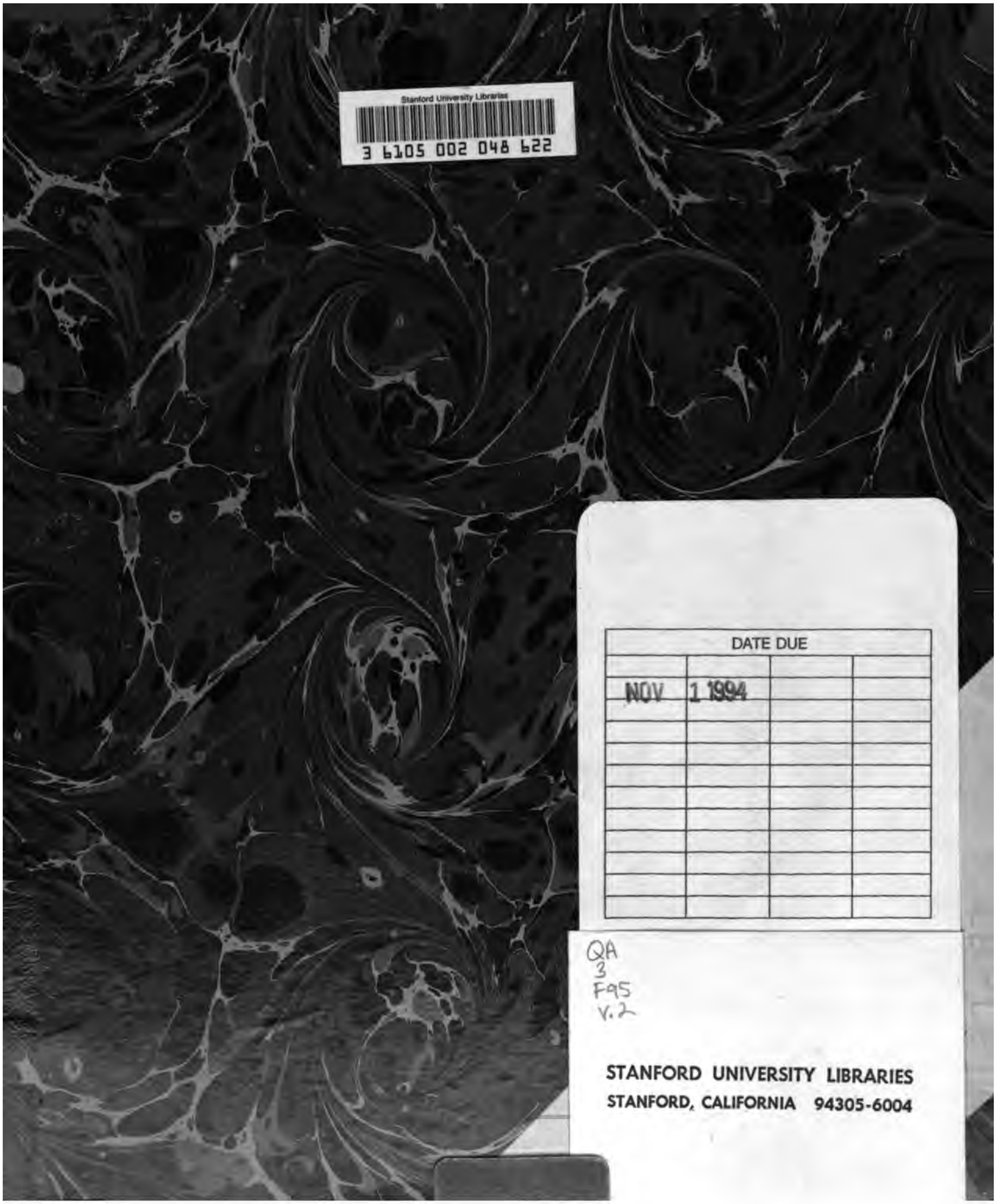
2) Die Bemerkung S. 470, Zeile 3—7 implicirt den Satz, dass für eine Differentialgleichung erster Ordnung keine mit den Anfangswerthen verschiebbaren singulären Stellen der Integrale auftreten können, in denen die Integrale unbestimmt werden. Für diesen Satz hat Herr PAINLEVÉ einen Beweis geliefert. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1888, vergl. auch PICARD, Traité d'Analyse, t. II, 1893, S. 328 (2. Aufl. 1905, S. 371), t. III, 1896, S. 43 und PAINLEVÉ, Leçons sur la théorie des équations différentielles, professées à Stockholm, Paris 1897, S. 23, 56 ff.) SCH.

BERICHTIGUNGEN.

S. 29, Gl. (2.) ist $A_{n-1,1}y_1+A_{n-1,2}y_2$ statt $A_{n1}y_1+A_{n2}y_2$ zu setzen (Druckfehler des Originals),
„ „, letzte Zeile ist zu lesen $\eta = A_{01}y_1+A_{02}y_2$,
„ 150, Zeile 17 ist vor »présentent« einzuschalten »se«,
„ 337, „ 5 ist »in« statt »ist« zu setzen. SCH.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).

10.4
957


Stanford University Libraries
3 6105 002 048 622

DATE DUE

NOV 1 1994

QA
3
F95
v.2

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004